

О ТОЧНОЙ ПЕРЕДАЧЕ ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА И УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА ПО СИНХРОННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ СВЕТИЛ В ДВУХ ПУНКТАХ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для точной передачи дирекционного угла ($m_\alpha < 0,5''$) и определения приращений уклонений отвеса предложен [1—3] способ синхронных наблюдений светил в двух пунктах земной поверхности, позволяющий, не зная точные геодезические координаты пунктов, получать приращения истинных уклонений отвеса между этими пунктами. Это, однако, означает возможность (не существующую в действительности) передачи геодезических координат по результатам одних лишь угловых измерений (без использования измерений линейных).

Чтобы устранить указанное противоречие, приведем вывод уравнений способа, применяя в основном обозначения [1—3], но отказываясь от каких-либо иных геометрических построений, кроме построений на вспомогательной сфере. Линейные элементы и данные о проекции Гаусса используем только для вычисления поправок, связанных с переходом на поверхность эллипсоида и на плоскость проекции.

Пусть в пункте P_1 земной поверхности с известными геодезическими координатами B_1 , L_1 и составляющими ξ , η_1 относительного уклонения отвеса известен дирекционный угол α_1 направления на смежный пункт N . Необходимо определить дирекционный угол α_2 направления из пункта P_2 на смежный пункт M по синхронным измерениям на пунктах P_1 и P_2 зенитных расстояний какой-либо звезды и горизонтальных углов между направлениями на соответствующие смежные пункты и этой звездой. Предполагаем известными приближенные значения (с точностью до $0,1'$) геодезических координат пункта P_2 . Считаем также, что разности геодезических координат точек P_2 и P_1 не превышают $1,5^\circ$, такого же порядка

удаления этих точек от осевого меридиана соответствующей зоны проекции Гаусса.

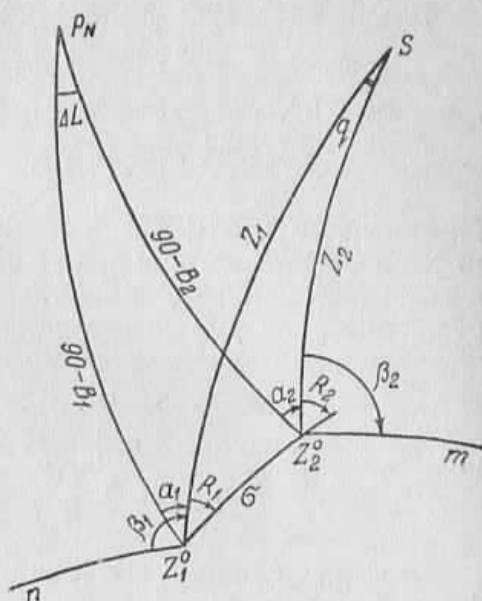
Получим уравнение связи между значениями дирекционных углов α_2 и α_1 , допуская, что известны геодезические координаты B_2, L_2 точки P_2 .

Обозначим через a_{1n} и a_{2m} соответственно геодезические азимуты направлений P_1N и P_2M (см. рисунок). Тогда

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a_{1n} - \gamma_1 - \delta_1 - \delta_1^H + \\ &+ \delta_1^G = a_{1n} - \gamma_1 + \Sigma_1, \\ \alpha_2 &= a_{2m} - \gamma_2 - \delta_2 + \delta_2^H + \\ &+ \delta_2^G = a_{2m} - \gamma_2 + \Sigma_2. \quad (1)\end{aligned}$$

Здесь γ_1 и γ_2 — гауссовы сближения меридианов в точках P_1 и

Построения на вспомогательной сфере:
 Z_1^0 и Z_2^0 — геодезические зениты точек P_1 и P_2 ; P_N — северный полюс Мира; S — положение наблюдаемой звезды; m и n — точки пересечения со сферой прямых, параллельных прямым P_2M и P_1N соответственно; a_1, a_2, Z_1, Z_2 — геодезические азимуты и зенитные расстояния звезды; β_1, β_2 — углы между нормальными плоскостями направлений на пункты N и M и на звезду.



P_2 ; $\delta_i, \delta_i^H, \delta_i^G$ — соответственно поправки за кривизну изображений геодезических линий на плоскости, за высоту визирных целей и за переход от нормальных сечений к геодезическим линиям. Величины Σ_1 и Σ_2 можно считать известными.

На основании (1) имеем

$$\alpha_2 = \alpha_1 + (a_{2m} - a_{1n}) - (\gamma_2 - \gamma_1) + \Sigma_2 - \Sigma_1. \quad (2)$$

Из рисунка следует

$$a_{2m} - a_{1n} = (a_2 - a_1) + \beta_1 + \beta_2. \quad (3)$$

Вводя обозначения $\Delta_{12} = R_2 - R_1$, $\gamma_{12} = (a_2 + R_2) - (a_1 + R_1) = (a_2 - a_1) + \Delta_{12}$ и принимая во внимание (3), приведем (2) к виду

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \gamma_{12} - (\gamma_2 - \gamma_1) - \Delta_{12} + \beta_1 + \beta_2 + \Sigma_2 - \Sigma_1. \quad (4)$$

Пусть $\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2$ — астрономические координаты пунктов; P_1 и $P_2, z_1, z_2, z_{1n}, z_{2m}$ — астрономические зенитные расстояния звезды и пунктов N, M . Сумма $\beta_1 + \beta_2$ углов между нормальными плоскостями связана с суммой $\beta'_1 + \beta'_2$ горизонтальных углов соотношением

$$\begin{aligned}\beta_1 + \beta_2 &= \beta'_1 + \beta'_2 + (\gamma_1 \cos a_1 - \xi_1 \sin a_1) \operatorname{ctg} z_1 - \\ &- (\gamma_2 \cos a_2 - \xi_2 \sin a_2) \operatorname{ctg} z_2 + \Sigma'_2 - \Sigma'_1, \quad (5)\end{aligned}$$

где $\xi_i = \varphi_i - B_i$, $\eta_i = (\lambda_i - L_i) \cos B_i$ — составляющие относительного уклонения отвеса.

Поправки $\Sigma_2' = (\eta_2 \cos a_{2m} - \xi_2 \sin a_{2m}) \operatorname{ctg} z_{2m}$, $\Sigma_1' = (\eta_1 \cos a_{1n} - \xi_1 \sin a_{1n}) \operatorname{ctg} z_{1n}$ для направлений на земные предметы при малых значениях ξ_i и η_i пренебрегаемы. Величину $\Delta_1 = (\eta_1 \cos a_1 - \xi_1 \sin a_1) \operatorname{ctg} z_1$ вычисляем достаточно точно с использованием приближенно измеренного зенитного расстояния z_1 и $a_1 \approx a_{1n} + \beta_1'$.

Уравнение (4) с учетом (5) принимает вид

$$\alpha_2 = \alpha_1 + f - \Delta_{12} - (\eta_2 \cos a_2 - \xi_2 \sin a_2) \operatorname{ctg} z_2 + \Sigma, \quad (6)$$

где

$$f = \gamma_{12} - (\gamma_2 - \gamma_1); \quad \Sigma = \Sigma_2 - \Sigma_1 + \Sigma_2' - \Sigma_1' + \Delta_1$$

Принимая $\alpha_2 = \alpha_2^0 + \Delta\alpha_2$, где α_2^0 — приближенное значение дирекционного угла направления P_2M , и обозначая через v поправку суммы измеренных горизонтальных углов, получим следующее параметрическое уравнение поправок, соответствующее синхронному наблюдению одной звезды на пунктах P_1 и P_2 ,

$$\Delta\alpha_2 + (\eta_2 \cos a_2 - \xi_2 \sin a_2) \operatorname{ctg} z_2 + l = v, \quad (7)$$

где

$$l = \alpha_2^0 - \alpha_1 + \Delta_{12} - f - \beta_1' - \beta_2' - \Sigma. \quad (8)$$

При вычислении свободного члена l при $\Delta B \approx \Delta L \approx 1,5^\circ$, где $\Delta B = B_2 - B_1$ и $\Delta L = L_2 - L_1$, в приближенных формулах необходимо учитывать члены третьего порядка малости относительно ΔB , ΔL .

Величину Δ_{12} определяем следующей совокупностью формул, вытекающих из сферического треугольника P_1P_2S :

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta_{12}}{2} = \operatorname{tg} \frac{q}{2} \cos Z_m \sec \frac{\Delta Z}{2},$$

$$\sin q = \sin \sigma \sin R_1 \operatorname{cosec} Z_2 = \sin \sigma \sin R_2 \operatorname{cosec} Z_1,$$

$$R_1 = A_1 - a_1, \quad R_2 = A_2 - a_2, \quad Z_m = \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2),$$

$$\Delta Z = Z_2 - Z_1, \quad a_1 = a_{1n} + \beta_1'. \quad (9)$$

Сферическую дугу σ и ее азимуты A_1 и A_2 следует вычислять путем решения обратной геодезической задачи на сфере (а не на эллипсоиде, как это делает автор). Для этого можно использовать формулы со средними аргументами:

$$A_2 - A_1 = \gamma_{12} = \Delta L \sin B_m \left(1 + \frac{\Delta B^2}{8} + \frac{\Delta L^2 \cos^2 B_m}{12} \right),$$

$$\sigma \cos A_m = \Delta B \left(1 - \frac{\Delta L^2}{12} - \frac{\Delta L^2 \sin^2 B_m}{24} \right),$$

$$\sigma \sin A_m = \Delta L \cos B_m \left(1 + \frac{\Delta B^2}{24} - \frac{\Delta L^2 \sin^2 B_m}{24} \right),$$

$$B_m = \frac{1}{2} (B_1 + B_2), \quad A_m = \frac{1}{2} (A_1 + A_2). \quad (10)$$

Для вычисления $f = \gamma_{12} - (\gamma_2 - \gamma_1)$ используем известную из сфероидической геодезии формулу

$$\gamma_i = (L_i - L_0) \sin B_i + \sin B_i \cos^2 B_i (1 + 3\gamma_i^2 + 2\gamma_i^4) \frac{(L_i - L_0)^3}{3} + \dots \quad (11)$$

и первое из выражений (10), которое с точностью до членов третьего порядка малости относительно ΔB , ΔL совпадает с точной формулой

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_{12}}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta L}{2} \sin B_m \sec \frac{\Delta B}{2}.$$

Учитывая (10), (11) и опустив пренебрегаемо малые члены, содержащие $\eta_i = e' \cos B_i$, получаем

$$f = (L_0 - L_m) \cos B_m \Delta B + \frac{\Delta L \Delta B^2}{4} \sin B_m + \\ + [\Delta L^3 - 4(L_2 - L_0)^3 + 4(L_1 - L_0)^3] \frac{\sin B_m \cos B_m}{12}, \quad (12)$$

где $L_m = \frac{1}{2} (L_1 + L_2)$; L_0 — долгота осевого меридиана зоны проекции Гаусса.

В (9), по которым вычисляется Δ_{12} , фигурируют геодезические зенитные расстояния звезды. Замена последних измеренными астрономическими вызывает появление в (7) члена

$$\delta \Delta_{12}^z \approx - \frac{\sigma}{2 \sin^2 z_m} \sin (A_m - a_m) [\Theta_1 \cos (Q_1 - a_1) + \\ + \Theta_2 \cos (Q_2 - a_2) + \delta z_1 + \delta z_2], \quad (13)$$

так как $\Delta_{12} \approx \sigma \sin (A_m - a_m) \operatorname{ctg} z_m$.

В (13) θ_i , Q_i соответственно полное уклонение отвеса и его азимут в пункте P_i ; δz_i — случайная ошибка измеренного зенитного расстояния ($i=1, 2$); $a_m = \frac{1}{2} (a_1 + a_2)$.

Как следует из (13), пренебрежение величинами θ_1 и θ_2 приводит к появлению в свободном члене уравнения (7) малой систематической ошибки порядка $\sigma \theta$, зависящей от азимута наблюдаемой звезды.

С ошибками δz_i связано появление в l случайной ошибки, среднее квадратическое значение m_Δ которой составляет $m_\Delta =$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2 \sin z_m}} |\sin(A_m - a_m)| m_z,$$

где m_z — средняя квадратическая ошибка измеряемого зенитного расстояния. При $\sigma = 1^\circ$ и $z_m = 45^\circ$ максимальное значение m_Δ составит $0,025 m_z$. В этом случае при $m_\Delta < 0,2''$ значение m_z не должно превышать $8''$. Этот подсчет показывает, что зенитные расстояния при больших значениях $\sigma \sin(A_m - a_m)$ должны измеряться достаточно точно, чтобы можно было пренебречь влиянием их ошибок на свободный член по сравнению с влиянием ошибки суммы горизонтальных углов ($m \approx 2''$).

Для совместного определения трех неизвестных Δa_2 , ξ_2 (или φ_2) и η_2 (или λ_2) в (7) необходимо выполнить на обоих пунктах синхронные наблюдения минимум трех звезд в различных вертикалях.

В [4] приведены результаты детального исследования азимутальных способов астрономических определений геодезического азимута (или дирекционного угла), составляющих уклонений отвеса (или широты и долготы) и выгоднейших условий наблюдений. Сделанные выводы полностью применимы к (7), если не учитывать влияния ошибок измеряемых зенитных расстояний на свободный член этого уравнения.

Приведенный выше вывод (7) предполагал известными точные значения геодезических координат как пункта P_1 , так и пункта P_2 . Допустим теперь, что l' — значение свободного члена, вычисленное с приближенными координатами B_2^0 , L_2^0 пункта P_2 , снятыми с точностью до $0,1'$ с топографической карты. Нетрудно убедиться, что в (8) для свободного члена все величины, кроме Δ_{12} , не зависят (или практически не зависят) от поправок δB_2 , δL_2 принятых значений геодезических координат. Поэтому $l = l' + \delta \Delta_{12}$.

Дифференцируя по B_2 и L_2 главный член выражения для

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &\approx (\Delta L \cos B_2 \cos a_2 - \Delta B \sin a_2) \operatorname{ctg} z_2 \approx \\ &\approx (\Delta L \cos B_1 \cos a_1 - \Delta B \sin a_1) \operatorname{ctg} z_1, \end{aligned}$$

получаем с погрешностью порядка $\sigma \delta B_2$, $\sigma \delta L$

$$\delta \Delta_{12} = (\delta L_2 \cos B_2^0 \cos a_2 - \delta B_2 \sin a_2) \operatorname{ctg} z_2.$$

Тот же результат можно получить, дифференцируя точные формулы (9). Уравнение (7) принимает вид

$$\Delta a_2 + (\eta_2^0 \cos a_2 - \xi_2^0 \sin a_2) \operatorname{ctg} z_2 + l' = v, \quad (14)$$

где $\eta_2^0 = (\lambda_2 - L_2^0) \cos B_2^0$, $\xi_2^0 = \varphi_2 - B_2^0$ — составляющие «смешанного» или «условного» [4] уклонения отвеса в пункте P_2 . Величину $\delta \Delta_{12}$ Э. А. Могилевский в своих выводах не учитывает. Из обработки синхронных наблюдений на двух пунктах P_1 и P_2 звезд в различных вертикалях можно получить независимо от малых

ошибок геодезических координат второго пункта разность $\alpha_2 - \alpha_1$ дирекционных углов и астрономические координаты φ_2, λ_2 этого пункта. Что же касается уклонений отвеса ξ_2, η_2 , то для вывода их истинных значений необходимо знать точные геодезические координаты B_2, L_2 .

Если ошибочны геодезические координаты двух пунктов и неизвестны ξ_1, η_1 , то (7) примет вид

$$\Delta\alpha_2 - [(\lambda_1 - L_1^0) \cos B_1^0 \cos a_1 - (\varphi_1 - B_1^0) \sin a_1] \operatorname{ctg} z_1 + \\ + [(\lambda_2 - L_2^0) \cos B_2^0 \cos a_2 - (\varphi_2 - B_2^0) \sin a_2] \operatorname{ctg} z_2 + l'' = v,$$

где

$$l'' = \alpha_2^0 - \alpha_1 + \Delta_{12} - f - \beta'_1 - \beta'_2 - (\Sigma_2 - \Sigma_1 + \Sigma'_2 - \Sigma'_1). \quad (15)$$

Использование при вычислении Δ_{12} вместо $a_1 = a_{1m} + \beta_1$ приближенного значения $a_1 \approx a_{1m} + \beta'_1$ приведет к ошибке порядка $\sigma\theta_1$ в свободном члене.

С такой же погрешностью можно вместо (15) записать

$$\Delta\alpha_2 = [(\eta_2^0 - \eta_1^0) \cos a_m - (\xi_2^0 - \xi_1^0) \sin a_m] \operatorname{ctg} z_m + l'' = v,$$

где

$$\eta_2^0 - \eta_1^0 = [(\lambda_2 - \lambda_1) - (L_2^0 - L_1^0)] \cos B_m^0; \\ \xi_2^0 - \xi_1^0 = (\varphi_2 - \varphi_1) - (B_2^0 - B_1^0). \quad (16)$$

В этом случае независимо от малых ошибок геодезических координат определяются разность дирекционных углов и разности астрономических координат пунктов или разности условных уклонений отвеса.

В уравнениях из [1—3], аналогичных (14) или (16), фигурируют не условные, а истинные уклонения отвеса.

Заметим также, что для вычисления величины Δ_{12} достаточно знать одно зенитное расстояние, если угол R_1 получать не из решения сферического треугольника $Z_1^0 Z_2^0 S$ по трем сторонам Z_1, Z_2, σ , а находить по формуле $R_1 = A_1 - (a_{1m} + \beta_1)$, как в [2, 3] и как сделано выше. Добавив к (9) выражение $\cos Z_1 = \cos Z_2 \cos \sigma - \sin Z_2 \sin \sigma \cos (R_1 + \Delta_{12})$, получим значение Δ_{12} последовательными приближениями, используя только зенитное расстояние Z_2 .

Список литературы: 1. Могилевский Э. А. О способе передачи дирекционного угла посредством синхронных наблюдений небесного светила. — Геодезия и картография, 1977, № 7. 2. Могилевский Э. А. Определение приращений уклонения отвеса по синхронным наблюдениям светил в двух пунктах земной поверхности. — Исследования по геодезии, аэрофотосъемке и картографии, 1978, вып. 3. 3. Могилевский Э. А. О высокоточной передаче дирекционного угла астрономическим путем. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1979, № 6. 4. Уралов С. С. Курс геодезической астрономии. — М.: Недра, 1980.

Статья поступила в редколлегию 01.12.83