

УДК 528.011.06:514.742

Г. А. ШЕХОВЦОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ МАТРИЦ

Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения. Преобразования подобия, не изменяющие собственных значений, можно использовать, например, для эквивалентной заме-

© Шеховцов Г. А., 1992

ны одного геодезического построения на равнозначное ему другое. В [1] изложен частный случай такой замены, основанный на анализе квадратического полигона. В данной статье рассматривается с общих позиций геометрическая интерпретация преобразований подобия матриц с использованием не только полигона, но и окружностей средних квадратических отклонений (о.с.к.о.).

При вставке одиночного пункта построение квадратического полигона осуществляется по значениям $a'_{i, j, k}$, связанным с

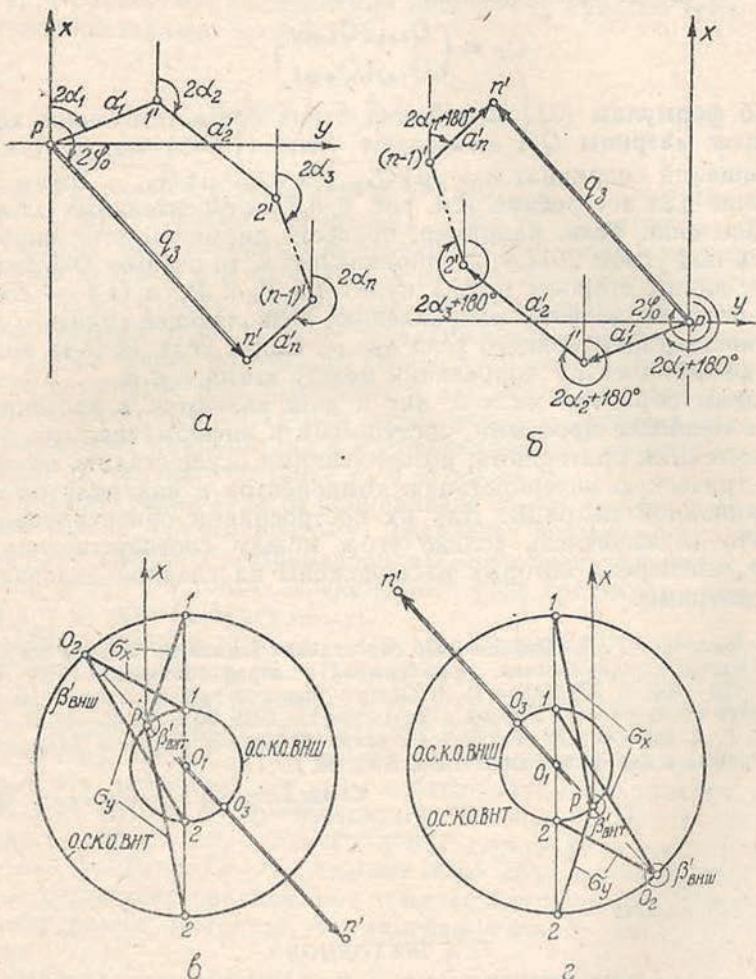


Рис. 1. Квадратические полигоны при угловых (а) и линейных (б) измерениях и соответствующие им о.с.к.о. внт и вниш (в, г).

квадратами градиентов расстояний, направлений g_j или углов g_k . При этом используют двойные дирекционные углы этих градиентов $2\alpha_{j, k}$ в случае угловых измерений (рис. 1, а) или углы $(2\alpha_i + 180^\circ)$ при линейных измерениях (рис. 1, б). При линей-

но-угловых измерениях квадратический полигон можно построить двумя способами. Вначале строят его часть по $a_i' = p_{s_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и углам $(2\alpha_i + 180^\circ)$, затем продолжают построения по $a_j' = p_{\alpha_j} g_j^2$ ($j = 1, 2, \dots, t$) или $a_k' = p_{\beta_k} g_k^2$ ($k = 1, 2, \dots, l$) с использованием углов $2\alpha_{j,k}$. Процесс построений можно упростить, беря в качестве a' величины $(p_{s_i} - p_{\alpha_j} g_j^2)$ и $(p_{s_i} - p_{\beta_k} g_k^2)$. Если в скобках получаем положительную величину, то на чертеже она откладывается под углом $(2\alpha_i + 180^\circ)$, если отрицательную, то под углом $2\alpha_{i,j,k}$. При таком подходе замыкающая полигона q_3 всегда будет направлена в его конечную точку n' под углом $2\varphi_0$, а периметр полигона Π равен сумме

$$\Pi = \sum_1^n p_{s_i} + \sum_1^t p_{\alpha_j} g_j^2 + \sum_1^l p_{\beta_k} g_k^2, \quad (1)$$

где p_s, α, β — веса соответствующих линейных и угловых измерений.

Зная периметр полигона и его замыкающую, можно вычислить радиус R и эксцентриситет e о. с. к. о. с внутренним (внт) эксцентриситетом

$$R^2, e^2 = \mu^2 \left(\frac{\Pi \pm \sqrt{\Pi^2 - q_3^2}}{\Pi^2 - q_3^2} \right), \quad (2)$$

а для о. с. к. о. с внешним (внш) эксцентриситетом необходимо в (2) поменять местами знаки перед радикалом.

Для построения о. с. к. о. внт или внш (рис. 1, в, г) достаточно отложить от точки P по направлению замыкающей величину $P-O_1$, равную эксцентриситету о. с. к. о. внт или радиусу о. с. к. о. внш. Точка O_1 является центром этих окружностей, причем сразу ориентированных относительно координатных осей, в чем заключается новое положительное качество квадратического полигона. Проведя диаметр 1—2 о. с. к. о. внт (внш) параллельно оси X , получаем с. к. о. пункта P по осям координат σ_x, σ_y , коэффициент корреляции между которыми $r_{xy} = \sin \beta_{\text{внт}} = \sin \beta_{\text{внш}}$. Следовательно, о. с. к. о. внт или внш являются геометрической интерпретацией ковариационной матрицы K_{xy} ошибок координат

$$K_{xy} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x \sigma_y r_{xy} \\ \sigma_x \sigma_y r_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

собственные значения которой $\lambda_1 \geq \lambda_2$ связаны с отрезками $O_2 O_3 = \sqrt{\lambda_1}$ и $P O_2 = \sqrt{\lambda_2}$ (рис. 1, в, г).

Преобразования подобия предусматривают получение таких матриц

$$K_{12} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & l_1 l_2 r_{12} \\ l_1 l_2 r_{12} & l_2^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

которые дают те же значения R, e и $2\varphi_0$ о. с. к. о. внт или внш, какие соответствуют матрице (3). В свою очередь, матрицы (4),

которых может быть бесчисленное множество, позволяют определить геометрические элементы однократных засечек, эквивалентно заменяющих анализируемую схему. В этом и заключается решение поставленной задачи, которое рассмотрим вначале на примере квадратического полигона.

Разнообразие полигонов с одной и той же конечной точкой n' и одинаковым периметром Π будет отражать собой разнообразие равнозначных серий наблюдений относительно одной и той же *о. с. к. о.*

Представим (рис. 2, а) при неизменном положении замыкающей q_3 полигон на рис. 1, а в виде полигона $p-1-n'$, состоящего всего из двух отрезков $P-1$ и $1-n'$ длиной Π_1 и Π_2 , сумма которых $\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi$. Ориентировка отрезков нового полигона будет соответствовать двойным дирекционным углам $2\alpha_{1a}$, $2\alpha_{2a}$ или $(2\alpha_{1a} + 180^\circ)$, $(2\alpha_{2a} + 180^\circ)$ направлений прямой угловой или линейной однократной засечки, а по длине этих отрезков можно судить о длине сторон таких засечек. Поскольку сумма расстояний Π_1 и Π_2 от точки 1 до точек P и n' должна быть величиной постоянной, равной Π , то при их изменении траекторией точки 1 будет эллипс, а P и n' — фокусами этого эллипса. Большая полуось такого эллипса равна $\Pi : 2$, а малая — $(\sqrt{\Pi^2 - q_3^2}) : 2$. Следовательно, пределами изменения Π_1 (или Π_2) являются значения

$$\frac{\Pi - q_3}{2} \leq \Pi_{1,2} \leq \frac{\Pi + q_3}{2}, \quad (5)$$

а в [1] рассмотрен только случай $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi : 2$.

В общем виде (рис. 2, а) удвоенный угол эквивалентной засечки находим из выражения

$$2\gamma_3 = 180^\circ - \arccos \frac{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - q_3^2}{2\Pi_1\Pi_2}, \quad (6)$$

причем при $\Pi_{1,2} = \min$ и $\Pi_{2,1} = \max$ имеем $2\gamma_3 = 180^\circ$, а при $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi : 2$ получим $\gamma_3 = \arccos(q_3 : \Pi)$ [1].

В свою очередь в зависимости от того, где (слева или справа от оси AB) находится точка 1 (рис. 2, а), имеем

$$\begin{aligned} 2\alpha_{1a}, (2\alpha_{1a} + 180^\circ) &= 2\varphi_0 \mp \delta_1, \\ 2\alpha_{2a}, (2\alpha_{2a} + 180^\circ) &= 2\varphi_0 \pm \delta_2, \end{aligned} \quad (7)$$

где углы δ_1 и δ_2 согласно теореме синусов составляют

$$\delta_2 = \arcsin \frac{\Pi_1 \sin 2\gamma_3}{q_3}, \quad \delta_1 = \arcsin \frac{\Pi_2 \sin 2\gamma_3}{q_3}, \quad (8)$$

а контролировать их вычисление можно суммой $\delta_1 + \delta_2 = 2\gamma_3$.

Если исходная схема включала только угловые измерения (рис. 1, а), то длины сторон s_{1a} и s_{2a} эквивалентной угловой засечки можно найти, представив выражение (1) в виде $\Pi = \Pi_1 +$

$+P_2 = p_{\alpha_1, \beta_1} g_1^2 + p_{\alpha_2, \beta_2} g_2^2$, тогда с учетом $g_{12} = \rho : s_{12}$ получим

$$s_{12} = \frac{\mu \rho}{m_{\alpha_1, \beta_1} \sqrt{P_1}}, \quad s_{23} = \frac{\mu \rho}{m_{\alpha_2, \beta_2} \sqrt{P_2}}. \quad (9)$$

Отсюда вычисляем, согласно [2], компоненты подобной матрицы (4):

$$l_1 = \frac{s_{23} m_{\alpha_2, \beta_2}}{\rho \sin \gamma_3}, \quad l_2 = \frac{s_{12} m_{\alpha_1, \beta_1}}{\rho \sin \gamma_3}, \quad r_{12} = \cos \gamma_3. \quad (10)$$

Если исходная схема (рис. 1, б) включала только линейные измерения, то, приняв $P = P_1 + P_2 = p_{s_{12}} + p_{s_{23}}$, находим для эквивалентной линейной засечки

$$m_{s_{12}} = \frac{\mu}{\sqrt{P_1}}, \quad m_{s_{23}} = \frac{\mu}{\sqrt{P_2}}, \quad l_1 = \frac{m_{s_{23}}}{\sin \gamma_3}, \quad l_2 = \frac{m_{s_{12}}}{\sin \gamma_3}, \quad (11)$$

$$r_{12} = \cos(\gamma_3 + 180^\circ).$$

Наконец, если исходная схема (рис. 1, а, б) содержит линейно-угловые измерения, то ее можно заменить, во-первых, однократной линейной засечкой с использованием формул (11), во-вторых, однократной угловой засечкой с использованием формул (9), если $p_s = 1$. Если $p_{\alpha, \beta} = 1$, то формулы (9) примут вид

$$s_{12} = \frac{\rho}{\sqrt{P_1}}, \quad s_{23} = \frac{\rho}{\sqrt{P_2}}. \quad (12)$$

Таким образом, разделяя P полигона на две части P_1 и P_2 , значения которых должны удовлетворять условию (5), можно получить соответствующие им матрицы (4), подобные матрице (3), при одновременном решении задачи эквивалентной замены одного геодезического построения на другое.

На рис. 2, б, в показана геометрическая интерпретация преобразований подобия матрицы (3) с помощью *о. с. к. о. внт.* У этой окружности $PO_2 = \sqrt{\lambda_2}$, $PO_3 = \sqrt{\lambda_1}$. Преобразования подобия осуществляются путем вращения диаметра 1—2. Если этот диаметр совместить с диаметром O_2O_3 так, чтобы точка 1 совпала вначале с точкой O_3 , а затем с точкой O_2 , то эквивалентная матрица (4) приобретет диагональную форму с расположенными на главной диагонали собственными значениями соответственно

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $l_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}}$, $r_{12} = 0$, а углы эквивалентной засечки будут $\alpha_{12} = \varphi_0$, $\alpha_{23} = \varphi_0 + 90^\circ$, $\gamma_3 = 90^\circ$. Длины сторон или средние квадратические ошибки их измерения можно вычислить по (10), (11).

При любом другом положении диаметра $1-2$ (рис. 2, б, в) отрезки $P-1=l_1$, $P-2=l_2$, а кофактор $l_1 l_2 r_{12}$ матрицы (4) равен удвоенной площади заштрихованного треугольника $1-P-2$. При этом площадь этого треугольника необходимо считать числом со знаком: положительным для *о. с. к. о. внт* с левым эксцентриситетом (точка P на рис. 2, б находится слева от оси X) и отрицательным для *о. с. к. о. внт* с правым эксцентриситетом (точка P на рис. 2, в находится справа от оси X). Действительно, $r_{12} = \sin(1-P-2)$, а это величина положительная при левом эксцентриситете, когда угол $(1-P-2) < 180^\circ$. При правом эксцентриситете r_{12} отрицателен, поскольку угол $(1-P-2) > 180^\circ$.

Для определения угловых элементов эквивалентной засечки, соответствующей данным значениям l_1 и l_2 , достаточно найти на их продолжении точки 3 и 4, лежащие на *о. с. к. о.* Тогда направления 3-5 и 4-6 будут соответствовать направлению сторон угловой засечки с a_{13} и a_{23} . Противоположные направления 5-3 и 6-4 будут соответствовать направлению сторон линейной засечки. На рис. 2, б, в все эти направления расположены под удвоенными дирекционными углами к оси X . По значениям l_1 , l_2 и γ_3 судят о линейных элементах эквивалентной засечки, используя (10) или (11).

С помощью *о. с. к. о. внт* можно проиллюстрировать преобразования подобия матриц не только при вставке одиночного пункта, но и применительно к любому пункту геодезической сети. Для этого необходимо в ковариационной матрице этой сети выделить подматрицу 2×2 , относящуюся к заданному пункту. По ее компонентам, аналогичным (3), легко построить (см. рис. 1, в, г) искомую *о. с. к. о.*, для которой справедливы все вышеприведенные положения.

Рассмотренные в данной статье и других наших работах различные методы геометрической интерпретации являются наглядной формой сопровождения вычислительных операций при математической обработке геодезических измерений. Реализация этих методов с использованием современных технических средств открывает новые возможности графического решения различных задач геодезии. Это, в свою очередь, способствует развитию геометрического (образного) мышления, дающего положительный эффект не только на стадии подготовки специалиста, но и в его практической деятельности.

1. Шеховцов Г. А. Метод замены многократных геодезических засечек на эквивалентные им простые // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1983. Вып. 37. С. 108—116. 2. Шеховцов Г. А. Теоретические основы приборов типа «подерограф» // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1985. Вып. 42. С. 95—103.

Статья поступила в редколлегию 23. 04. 90