

## ВИБІР МАЛОХВИЛЬОВИХ БАЗОВИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ОПРАЦЮВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ СИГНАЛІВ

©Лагун І.І., Наконечний А.Й.

**The comparative characteristics of two criteria for selecting the optimal wavelet basis functions: the minimum standard deviation and entropy criterion. Based on these criteria the optimal wavelet basis functions were determined. The results of the executed research to determine the effectiveness of the each criterion when implementing the algorithms for the signal's compression are presented.**

**Keywords - basis wavelet, mother wavelet, optimal wavelet.**

Наведено порівняльну характеристику двох критеріїв вибору оптимальної базової малохвильової функції: мінімального середньоквадратичного відхилення та ентропійного критерію. На основі згаданих критеріїв визначено оптимальні базові малохвильові функції та представлено результати проведених досліджень для визначення ефективності кожного з критеріїв при реалізації алгоритмів стиснення сигналів.

**Ключові слова – малохвильовий базис, материнська малохвильова функція, оптимальна малохвильова функція, вейвлет перетворення, хвильове перетворення.**

### Вступ

На даний час широкого розповсюдження набули методи обробки сигналів, які базуються на використанні малохвильової теорії. Області застосувань малохвильового перетворення є досить різноманітними: дослідження нестационарних процесів, цифрова фільтрація, компресія даних, комп'ютерна графіка, нанесення цифрових підписів та ін.

Найпоширенішими напрямками опрацювання сигналів є очищення сигналу від завад та стиснення сигналів і, зокрема, стиснення зображень. Процеси, в основі яких лежить малохвильове представлення передбачають декомпозицію спостережуваного сигналу на малохвильові складові і використання порогування для вибору коефіцієнтів, які будуть основою для синтезу сигналу.

Ефективність таких підходів полягає у можливості вибору таких базових малохвильових функцій, які могли б забезпечити якісну декомпозицію і зосередити енергію сигналу в невеликій кількості значущих ненульових коефіцієнтів.

### 1. Основні критерії оцінювання оптимальності вибору малохвильових функцій

Відзначимо, що основний алгоритм фільтрації та алгоритм компресії сигналів дуже схожі між собою. В основі цих алгоритмів лежать три етапи:

- розкладання сигналу;
- порогова обробка коефіцієнтів або ж відповідне квантування та кодування;
- реконструкція сигналу.

На першому етапі з допомогою дискретного малохвильового перетворення проводиться декомпозиція сигналу з використанням відповідних малохвильових функцій. На другому етапі вибирається частина коефіцієнтів для порогової обробки, зберігаючи неушкодженими коефіцієнти апроксимації відповідного рівня. На третьому етапі на основі модифікованих коефіцієнтів, проводиться реконструкція сигналу зворотнім дискретним малохвильовим перетворенням.

При реалізації компресії та фільтрації сигналів важливим питанням є наявність достатньої кількості інформації для реконструкції сигналу з заданою якістю. Тому однією з вимог до базових

малохвильових функцій є забезпечення найбільш повної реконструкції сигналу при зворотному малохвильовому перетворенні.

Таким чином, на якість стиснення сигналу та очищення його від завад може істотно впливати вид і порядок базової малохвильової функції. На даний час існує гостра потреба в пошуку малохвильових базових функцій, оптимальних стосовно критерію відношення ступеня стиснення до якості відновленого сигналу. Тому, для існуючих алгоритмів стиснення та очищення сигналів від завад основними вимогами є:

- максимальне послаблення рівня завад та стиснення, при збереженні корисних складових сигналу;
- можливість відновлення сигналу з відповідною якістю.

Отже, з одного боку необхідно обрати таку базову малохвильову функцію, яка б дозволяла отримати мінімальне значення середньоквадратичного відхилення відтвореного сигналу від оригінального, з іншого боку забезпечити максимально-можливу ступінь стиснення сигналу при задовільній його якості. З огляду на це, для визначення оптимальності вибору малохвильових функцій для стиснення одновимірних сигналів вибрані два критерії:

- критерій мінімального середньоквадратичного відхилення відтвореного сигналу від оригінального, що дозволяє вибрати оптимальну малохвильову функцію для забезпечення високої якості реконструйованого сигналу [5]:

$$MSE(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2, \quad (1)$$

де  $N$  – кількість відліків сигналу,  $X$  – вихідний сигнал та  $Y$  – сигнал, отриманий в результаті реконструкції.

- критерій мінімуму ентропії, як показник гладкості сигналу, що дозволяє отримати високий коефіцієнт стиснення (очищення) сигналу [4].

$$E(X) = - \sum_{\beta=1}^m \sum_{j=1}^{2^{(m-\beta)}} p_j^{(\beta)} \cdot \ln(p_j^{(\beta)}) \rightarrow \min, \quad p_j^{(\beta)} = \frac{|c_j^{(\beta)}|^2}{\sum_{\beta,j} |c_j^{(\beta)}|^2}, \quad (2)$$

де  $c_j^{(\beta)}$  – деталізуючі вейвлет-коефіцієнти,  $\beta$  – рівень деталізації,  $j$  – індекс коефіцієнта на  $\beta$ -му рівні деталізації,  $m$  – кількість рівнів деталізації

## 2. Отримані результати

Враховуючи усі необхідні вимоги, для досліджень обрані наступні малохвильові базисні функції:

- сімейство ортогональних малохвильових функцій з компактним носієм Добеші (db1...db20), Койфлети (coif1...coif5), Симлети (sym1...sym8);
- сімейство біортогональних пар малохвильових функцій з компактним носієм (bior1.1 - rbior1.1...bior6.8 - rbior6.8).

Дослідження проводилися з використанням тестових сигналів пакету Matlab.

Для визначення оптимальних базових функцій за критерієм мінімальної похибки середньоквадратичного відхилення, проведено розкладання тестових сигналів з допомогою обраних малохвильових базових функцій та їх реконструкція з допомогою оберненого перетворення. Для кожної малохвильової функції, для всіх рівнів розкладу, обчислювалася похибка середньоквадратичного відхилення згідно виразу (1). Значення визначеної похибки сортувалися у порядку зростання. В результаті отримано множину значень середньоквадратичних відхилень при використанні різних базових функцій для певного типу сигналу з врахуванням усіх рівнів розкладу.

В таблиці 1 наведено п'ять перших позицій із загальної кількості отриманих результатів за критерієм похибки середньоквадратичного відхилення для тестового сигналу 'linchirp.mat':

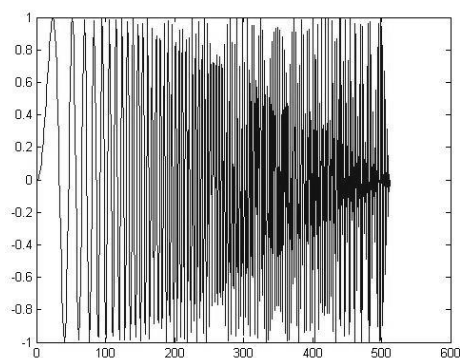


Рис.1. Тестовий сигнал 'linchirp.mat'

Таблиця 1.

**Ефективність застосування базових функцій згідно критерію середньоквадратичної похибки MSE**

| Рівні розкладу/ Базисна функція |         |         |         |         |         |         |
|---------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1                               | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       |
| db1                             | rbio2.4 | rbio2.4 | bior2.4 | bior2.6 | rbio2.6 | bior2.6 |
| bior1.1                         | db1     | bior2.4 | rbio2.4 | rbio2.6 | bior2.6 | rbio2.6 |
| rbio1.1                         | bior1.1 | bior2.6 | bior2.6 | bior2.4 | rbio2.4 | bior2.4 |
| sym1                            | rbio1.1 | rbio2.6 | rbio2.6 | rbio2.4 | bior2.4 | rbio2.4 |
| bior2.4                         | sym1    | db1     | db1     | db1     | db1     | db1     |

Базові малохвильові функції розташовано у порядку зростання значень середньоквадратичного відхилення для кожного рівня розкладу. Наприклад, для однорівневого розкладу сигналу найкращий результат отримано при використанні базової малохвильової функції db1, дещо гірші результати дало використання інших функцій (bior1.1, rbio1.1, sym1, bior2.4).

Аналогічно проводились визначення ефективності застосування базисних функцій згідно критерію мінімуму ентропії. Для усіх малохвильових функцій всіх рівнів розкладу обраховувалася ентропія за виразом (2). Значення ентропії було відсортовано у порядку зростання. У таблиці 2 наведено п'ять перших позицій із загального числа отриманих результатів за критерієм мінімуму ентропії для тестового сигналу 'linchirp.mat':

Таблиця 2.

**Ефективність застосування базових функцій згідно критерію мінімуму ентропії  $E_{\min}$**

| Рівні розкладу/ Базисна функція |         |         |         |         |         |         |
|---------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1                               | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       |
| db19                            | bior3.9 | bior3.9 | bior3.9 | bior3.9 | bior3.1 | bior3.1 |
| bior3.1                         | bior3.7 | bior3.7 | bior3.7 | bior3.7 | bior3.9 | bior3.9 |
| bior3.3                         | bior3.5 | bior3.5 | bior3.5 | bior3.5 | bior3.7 | bior3.7 |
| bior3.5                         | bior3.3 | bior3.1 | bior3.1 | bior3.1 | bior3.5 | bior3.5 |
| bior3.7                         | bior3.1 | bior3.3 | bior3.3 | bior3.3 | bior3.3 | bior3.3 |

Аналогічні результати отримано ще для 27 тестових сигналів. На основі отриманих результатів за двома критеріями оцінки здійснювались подальші дослідження алгоритмів очищення сигналу від завад та стиснення сигналів. Ефективність кожного з критеріїв визначалася величиною коефіцієнта стиснення сигналів, похибкою відношення сигнал/шум, величиною коефіцієнта кореляції початкового та відтвореного сигналів.

В процесі фільтрування і компресії використовувалося швидке малохвильове перетворення (ШМП). Відомо, що ефективність методів стиснення (очищення) сигналів значно знижується після 7-го рівня розкладу сигналу [3], саме тому розкладання сигналу проводилось на 1–7 рівнях.

Таблиця 3.

**Результати за критерієм середньоквадратичної похибки MSE при практичній реалізації алгоритму стиснення для сигналу 'linchirp.mat'**

| Малохвильова функція | Рівень розкладання | Кількість обнулених коефіцієнтів сигналу (%) | Збережена енергія сигналу (%) | Коефіцієнт стиснення |
|----------------------|--------------------|----------------------------------------------|-------------------------------|----------------------|
| bior2.6              | 7                  | 81.60                                        | 81.55                         | 3.88                 |
| bior2.6              | 6                  | 81.23                                        | 81.26                         | 3.82                 |
| bior2.4              | 7                  | 81.72                                        | 81.67                         | 3.74                 |
| bior2.6              | 5                  | 80.31                                        | 80.44                         | 3.72                 |
| bior2.4              | 6                  | 81.28                                        | 81.10                         | 3.69                 |

Таблиця 4.

**Результати за критерієм мінімуму ентропії при практичній реалізації алгоритму стиснення для сигналу 'linchirp.mat'**

| Малохвильова функція | Рівень розкладання | Кількість обнулених коефіцієнтів сигналу (%) | Збережена енергія сигналу (%) | Коефіцієнт стиснення |
|----------------------|--------------------|----------------------------------------------|-------------------------------|----------------------|
| bior3.1              | 6                  | 88.57                                        | 88.56                         | 6.40                 |
| bior3.9              | 5                  | 88.15                                        | 88.02                         | 6.38                 |
| bior3.1              | 7                  | 88.80                                        | 88.67                         | 6.27                 |
| bior3.1              | 4                  | 85.41                                        | 85.38                         | 5.32                 |
| bior3.9              | 6                  | 85.37                                        | 85.57                         | 5.32                 |

Найкращі результати отримані при розкладанні сигналу на шостому, сьомому та п'ятому рівнях з використанням функцій bior3.1 та bior3.9, що відповідає даним, наведеним в таблиці 2. Таким чином, отримані результати підтверджують доцільність застосування базових малохвильових функцій, визначених за критерієм мінімуму ентропії, як оптимальних.

При реалізації алгоритму очищення сигналу від завад, для вибору оптимального граничного значення використовувався адаптивний критерій Штейна. Оскільки якість шумоподавлення сигналу залежить також і від способу застосування граничної обробки, використовувалася багаторівнева обробка з використанням порогу  $\lambda$ , значення якого змінюється від рівня до рівня.

Шумові складові отримано шляхом моделювання білого шуму з  $N(0,1)$  в пакеті Matlab з кількістю відліків рівною кількості відліків корисного сигналу. Дослідження проводились для тестового сигналу, представленого на рис.2.

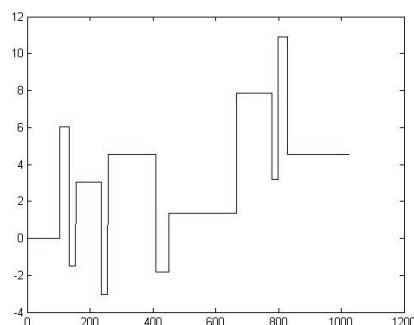


Рис.2. Тестовий сигнал 'block.mat'

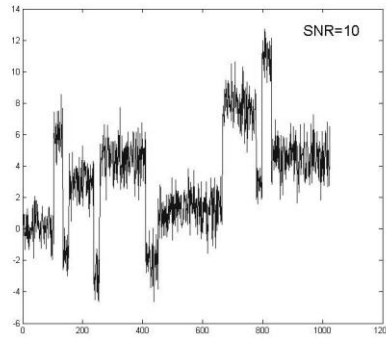


Рис.3 Тестовий сигнал 'block.mat' з шумовими складовими

В таблицях 5 та 6 для даного сигналу наведено п'ять перших позицій із загальної кількості отриманих результатів за критерієм середньоквадратичної похибки та ентропійним критерієм

Таблиця 5.

**Ефективність застосування базових функцій згідно критерію середньоквадратичної похибки MSE для сигналу 'block.mat'**

| Рівні розкладу/ Базисна функція |         |         |         |         |         |         |
|---------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1                               | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       |
| bior3.3                         | bior2.4 | bior2.4 | bior3.7 | bior3.7 | bior3.7 | rbio3.3 |
| rbio2.4                         | bior3.3 | bior3.7 | bior2.4 | bior2.4 | bior2.4 | bior2.4 |
| rbio3.3                         | bior3.7 | rbio3.3 | bior3.3 | rbio3.3 | rbio3.3 | bior3.7 |
| rbio3.9                         | bior2.8 | bior3.3 | rbio3.3 | bior3.3 | bior3.3 | rbio2.4 |
| rbio3.5                         | bior3.9 | rbio3.5 | bior2.8 | bior2.8 | rbio2.4 | bior2.6 |

Таблиця 6.

**Ефективність застосування базових функцій згідно критерію для мінімуму ентропії  $E_{\min}$  для сигналу 'block.mat'**

| Рівні розкладу/ Базисна функція |         |         |         |         |         |         |
|---------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1                               | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       |
| bior1.1                         | bior1.1 | bior1.1 | bior1.1 | bior1.3 | bior3.1 | bior1.1 |
| bior1.3                         | bior1.3 | bior1.3 | db1     | bior1.1 | bior1.1 | db1     |
| bior1.5                         | bior1.5 | bior1.5 | rbio1.1 | db1     | db1     | rbio1.1 |
| db1                             | db1     | db1     | sym1    | rbio1.1 | rbio1.1 | sym1    |
| rbio1.1                         | rbio1.1 | rbio1.1 | bior1.3 | sym1    | sym1    | bior1.3 |

Базові малохвильові функції розташовано у порядку зростання значень середньоквадратичного відхилення (табл.5) та ентропійного критерію (табл.6) для кожного рівня розкладу.

Таблиця 7.

**Результати за критерієм середньоквадратичної похибки MSE при практичній реалізації алгоритму очищення сигналу від завад для сигналу 'block.mat'**

| Малохвильова функція | Рівень розкладання | Коефіцієнт відношення сигнал шум (SNR) | Коефіцієнт кореляції |
|----------------------|--------------------|----------------------------------------|----------------------|
| bior3.3              | 3                  | 13,82                                  | 0,9908               |
| bior3.7              | 3                  | 13,69                                  | 0,98982              |
| rbio3.3              | 3                  | 13,33                                  | 0,9897               |
| bior2.4              | 2                  | 13,32                                  | 0,98938              |
| bior3.7              | 2                  | 13,31                                  | 0,98935              |

Таблиця 8.

**Результати за ентропійним критерієм при практичній реалізації алгоритму очищення сигналу від завад для сигналу "block.mat"**

| Малохвильова функція | Рівень розкладання | Коефіцієнт відношення сигнал шум (SNR) | Коефіцієнт кореляції |
|----------------------|--------------------|----------------------------------------|----------------------|
| bior1.3              | 3                  | 14,58                                  | 0,9920               |
| bior1.1              | 3                  | 14,09                                  | 0,9915               |
| bior1.5              | 3                  | 14,05                                  | 0,9911               |
| bior1.3              | 2                  | 13,53                                  | 0,9898               |
| bior1.1              | 2                  | 13,46                                  | 0,98978              |

Найкращі результати отримані при розкладанні сигналу на третьому та другому рівнях з використанням функцій bior1.3 та bior1.1 визначеним згідно ентропійного критерію, що відповідає даним, наведеним в таблиці 6.

Отже, у більшості випадків найбільш доцільно при фільтрації сигналів застосовувати багаторівневе розкладання при попередньому виборі оптимального малохвильового базису згідно критерію мінімуму ентропії із врахуванням рівнів розкладання сигналів. Важливим завданням є також вибір рівня розкладу і спосіб застосування порогової обробки, адже неправильний вибір цих параметрів може призвести до втрати інформативних складових сигналу.

### Висновок

На основі проведених досліджень отримано загальну класифікацію базових малохвильових функцій за ефективністю опрацювання різних типів одновимірних сигналів згідно критерію середньоквадратичної похибки та ентропійного критерію. Оптимальний вибір визначених базових малохвильових функцій підтверджений результатами досліджень за двома критеріями при реалізації алгоритму стиснення сигналів. Вибір оптимальної малохвильової функції за ентропійним критерієм дає кращі результати при стисканні сигналів ніж використання критерію середньоквадратичної похибки. Подальші дослідження передбачаються в напрямку можливості застосування даних методів до двовимірних сигналів, а також пошуку нових, більш ефективних критеріїв оптимальності визначення базових малохвильових функцій.

1. Дремін И.М. Вейвлеты и их использование / И.М. Дремін, О.В. Иванов, В.А. Нечитайло. – УФН № 5. – 2001. 2. Дьяконов В. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник./ Дьяконов В., Абраменкова И. – СПб.: Питер, –2002.–С.602. 3. Комаров И.Э. Методика количественной оценки значимости вейвлет-базиса./ И.Э. Комаров В.А. Майстренко // Омский научный вестник. – № 3 (93) – 2010. – С. 202 – 206. 4. А.Й. Наконечний. Цифрова обробка сигналів./ А.Й. Наконечний, Р.А. Наконечний, В.А. Павлич. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, – 2010.–С.360. 5. Лагун І.І. Основні підходи до вибору оптимального малохвильового базису./ Лагун І.І., Наконечний А.Й.// Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. – Сер.: Автоматика, вимірювання та керування. – Львів : НУ “Львівська політехніка”. – 2009. – № 639. – С. 71. 6. І.І. Лагун. Оцінка якості зображень при фільтрації сигналів різними базисними малохвильовими функціями./ І.І. Лагун; А.Й. Наконечний. // Збірник тез доповідей XI Міжнародної наукової конференції з контролю і управління в складних системах «КУСС-2012» – Вінниця, 2012.– С.101.