

**АНАЛІЗ СПОТВОРЕННЯ ПРОФІЛЮ ЗУБА ЦИЛІНДРИЧНОГО
ЗУБЧАСТОГО КОЛЕСА ГІПЕРБОЛОЇДНИМ ШЛІФУВАЛЬНИМ
КОЛОМ ЗАСОБАМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

© Артур Едуардович Воронов

На основі математичної моделі, яка описує процес зачеплення циліндричного зубчастого колеса і гіперboloїдного шліфувального круга, отримана комп'ютерна модель для моделювання цього процесу. Модель дозволила дослідити спотворення профілю зуба циліндричного зубчастого колеса при застосуванні гіперboloїдного і циліндричного шліфувальних кругів. Наочно показані місця схильні до найбільших спотворень і відхилення форми профілю зуба циліндричного зубчастого колеса при зміні окремих параметрів інструмента.

On the basis of a mathematical model which is describe the process of engaging the spur gear and the wheel hyperboloid a computer model to simulate the process obtained. The model allowed investigate the profile distortion of the tooth spur gear in the application of hyperboloid and cylindrical grinding wheels. It has been amply demonstrated the places most affected by distortions and the change of tool with changing some of its parameters.

гіперboloїдний, зубчасте колесо, модель, спотворення профілю зуба, шліфувальний

Постановка проблеми

Високий рівень науково-технічного розвитку збільшує темпи освоєння на практиці нових машин і механізмів. В основі більшості частин машин, що рухаються, закладений принцип зубчастого зачеплення. Причому зубчасте зачеплення проявляється не тільки у час використання готових деталей, але й у процесі їх виготовлення або виправлення. Так, при вивченні принципів формоутворення циліндричних зубчастих коліс, особливо можна виділити інструменти, що мають гвинтові поверхні, які дозволяють прискорити процес одержання деталі й підвищити його точність. Питання точності виготовлення особливо актуальне на етапах фінішної обробки виробу. Змінення форми інструмента здатне підвищити точність або швидкість обробки зі збереженням прийнятної точності. Так, розглядаючи процес шліфування циліндричних зубчастих коліс, застосування гіперboloїдних поверхонь [1] дозволяє підвищувати продуктивність у порівнянні із циліндричними черв'ячними шліфувальними колами [2]. Аналіз зміни точності доцільно проводити застосовуючи сучасні інструменти. На даний момент рівень розвитку комп'ютерної техніки й програмних пакетів обробки інформації дозволяє прискорити процес аналізу та скоротити об'єм матеріалу й необхідного часу на виготовлення дослідних зразків і оснащення. Оскільки кожне завдання у своєму роді унікальне й моделювання гіперboloїдних гвинтових поверхонь не розглядається при написанні популярних програмних пакетів, стає актуальним розробка алгоритмів, здатних показати результати застосування зміненої форми інструмента для аналізу його переваг, недоліків і можливості застосування.

Аналіз останніх досліджень

Питаннями підвищення якості й продуктивності обробки зубчастих коліс опікувалися Новиков Ф. В., Литвин Ф. Л., Батьківщин П.Р., Вітренко В. О., Грибанов В. М., та ін. Підходячи до розв'язку цих завдань були застосовані методи диференціальної геометрії й матричного обчислення. Однак, у силу недостатності обчислювальної потужності комп'ютерної техніки на час вивчення

питань, не був проведений аналіз за допомогою моделювання, який дозволяє у будь-який момент часу вивчити реальні положення заготовки й інструмента, а також виникаючих між ними сил.

Формулювання мети доповіді

Метою роботи є дослідження процесу зачеплення гіперболоїдного шліфувального кола із циліндричним зубчастим коліс і оцінювання спотворення профілю зуба останнього за результатами комп'ютерного моделювання.

Основна частина

У представленій роботі розглядається процес одержання комп'ютерних моделей шліфувальних кіл на прикладі гіперболоїдного шліфувального кола й вивчення величини спотворення профілю зуба циліндричного зубчастого колеса, оброблюваного таким інструментом.

Для процесу моделювання необхідне математичне уявлення циліндричного зубчастого колеса й гіперболоїдного шліфувального кола. Математичне уявлення циліндричного зубчастого колеса можливо якщо описати рівнянням евольвенти поверхню, що формує його зуб, й місце цієї евольвенти в просторі. Зв'яжемо отриману просторову криву з деякою системою координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$. Нехай у просторі розташоване гіперболоїдне шліфувальне коло, пов'язане із системою координат $S_2(x_2, y_2, z_2)$. Ці системи координат можуть бути математично погоджені між собою застосуванням методів диференціальної геометрії й матричного обчислення [3], зв'язуючи одну зі ступенів свободи завдяки рівнянню безперервності верстатного зачеплення.

Аналітичний вираз форми й положення гіперболоїдного шліфувального кола залежно від форми положення циліндричного зубчастого колеса можна представити у вигляді системи 4-ьох рівнянь [4].

$$\begin{cases} x_2 = z_1 \cos \phi_2 \sin \gamma + S_1 \cos \phi_2 \cos \gamma + y_1 (-\sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos \gamma - \cos \phi_1 \sin \phi_2) + \\ \quad + x_1 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \gamma - \sin \phi_1 \sin \phi_2) - A \sin \phi_2, \\ y_2 = z_1 \sin \phi_2 \sin \gamma + S_1 \sin \phi_2 \cos \gamma + y_1 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \gamma) + \\ \quad + x_1 (\cos \phi_1 \sin \phi_2 \cos \gamma + \sin \phi_1 \cos \phi_2) + A \cos \phi_2, \\ z_2 = -S_1 \sin \gamma + \sin \phi_1 y_1 \sin \gamma - \cos \phi_1 x_1 \sin \gamma + z_1 \cos \gamma + l, \\ y_1' (u_{21} z_1 \sin \phi_1 \sin \gamma + u_{21} S_1 \sin \phi_1 \cos \gamma + y_1 (u_{21} \cos \gamma - 1) - u_{21} A \cos \phi_1 \cos \gamma) - \\ - x_1' (u_{21} z_1 \cos \phi_1 \sin \gamma + u_{21} S_1 \cos \phi_1 \cos \gamma + x_1 (1 - u_{21} \cos \gamma) + u_{21} A \sin \phi_1 \cos \gamma) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

У системі (1) три перші рівняння описують перехід від системи S_1 до системи S_2 в координатній формі. Четверте рівняння системи є наслідком безперервності верстатного зачеплення. Система рівнянь (1) отримана за допомогою математичного пакета Maxima [4, 5], після введення послідовності елементарних перетворень систем координат і необхідної інформації про профіль вихідного циліндричного зубчастого колеса, а також складових частин рівняння безперервності верстатного зачеплення.

Складеної системи рівнянь не достатньо для аналізу поведінки гіперболоїдного шліфувального кола, оскільки неможливо в явній формі визначити крапку і її положення на гвинтовій гіперболоїдній поверхні, яка буде відповідати певній крапці циліндричного зубчастого колеса. Для аналізу необхідно одержати всі крапки гіперболоїдної поверхні, або певної частини поверхні, що є першим етапом моделювання. Обробка такого ємного масиву даних можливо тільки при застосуванні високорівневих мов комп'ютерного програмування. У якості такої мови обрано компільовану, що підтримує об'єктно-орієнтоване програмування, мову C++ [4, 6]. Оболонкою для реалізації програмного коду обрана Eclipse SDK — вільне інтегроване середовище розробки модульних крос-платформних додатків, яке розвивається й підтримується Eclipse Foundation [4, 7].

У результаті використання розробленої програми отримана база даних крапок поверхні гіперболоїдного колеса й графічний інструмент, що дозволяє аналізувати процес зачеплення зубчастих коліс (рис. 1).

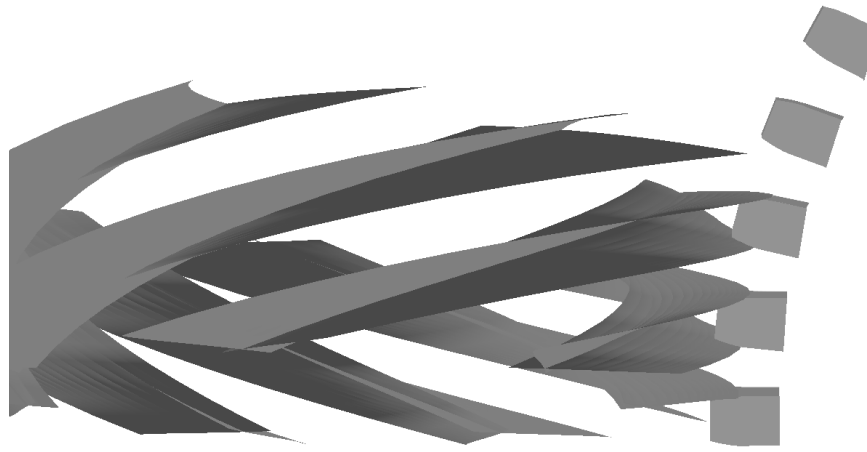


Рис.1. OpenGL промальовка в Eclipse SDK зачеплення гіперболоїдного шліфувального кола й циліндричного зубчастого колеса

У підґрунті гіперболоїдної поверхні лежить прямолінійна утворююча, уздовж якої відбувається повне повторення профілю зуба циліндричного зубчастого колеса будь-якого діаметра. Для наочності будемо розглядати зубчасту рейку – циліндричне зубчасте колесо нескінченне великого діаметру. Розглянемо результати моделювання по системі рівнянь (1). Для цього побудуємо кілька моделей гіперболоїдного шліфувального кола, що мають кут схрещування осей $\gamma = 95^\circ$ і $Z_2 = \{5, 3, 1\}$ заходів черв'яка (рис. 2).

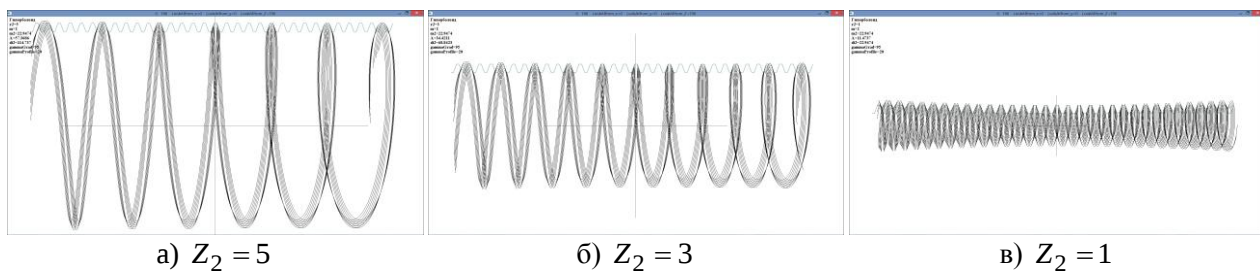


Рис.2. Моделі гіперболоїдного шліфувального кола при фіксованому куті схрещування осей і числі заходів Z_2

На (рис. 2) зображений тільки один захід з можливих Z_2 числа заходів для спрощення візуального сприйняття, тому починаючи на нульовій висоті й роблячи один повний оберт гіперболоїдна спіраль попадає в Z_2 зубець зубчастої рейки. Другий і інші заходи гіперболоїдної моделі для багатозаходного черв'яка утворюються поворотом промальованої моделі на кут $\alpha_2^{i-\text{го захода}} = 360^\circ \cdot i / Z_2$, де i – номер заходу мінливий від 2 до Z_2 . Для всіх трьох варіантів зображених на рис. 2 кут схрещування осей γ заданий однаковим, а отже й кут підйому витка зберігається. Як наслідок, при незмінному значенні кута підйому витка зі зменшенням числа заходів гіперболоїдного черв'яка Z_2 відбувається зменшення значення ділильного діаметра гіперболоїдного інструмента в горловому перетині d_2^i .

Другий варіант побудови моделі гіперболоїдного колеса – використання в якості фіксованого вхідного параметра ділильний діаметр гіперболоїдного інструмента в горловому перетині d_2^i й змінюючи значення кута схрещування осей γ (рис. 3). Оскільки діаметри гіперболоїдних моделей у горловому перетині задаються однаковими, то зі збільшенням числа заходів черв'яка зростає кут схрещування осей γ , а отже зростає кут підйому витка $\gamma^{\text{витка}}$.

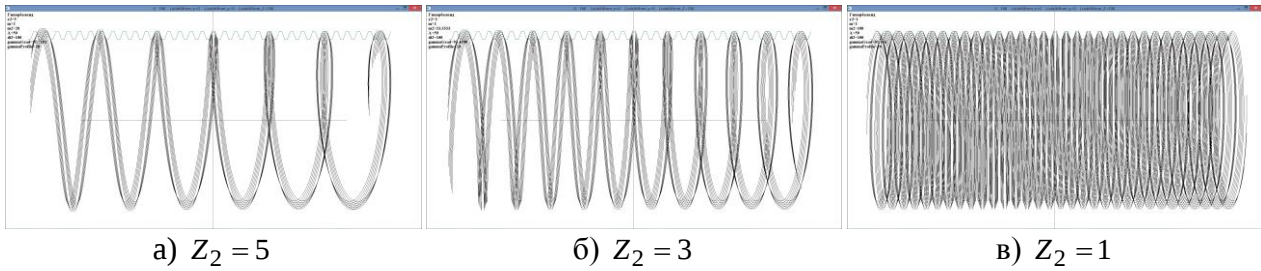


Рис.3. Моделі гіперболоїдного шліфувального кола для діаметра в горловому перетині $d_2^i = 100$ мм й числі заходів Z_2

Реальне зубчасте колесо має товщину відмінну від товщини утворюючої гіперболоїдного шліфувального кола, звідси впливає завдання вивчення спотворень профілю зуба, які при цьому виникають. Для цього модель доповнюється крапками контакту в суміжних моментах часу, які проєктуються на площину XOY в системі координат зубчастої рейки $S_1(x_1; y_1; z_1)$. Цю процедуру можливо проробити за допомогою січних площин висот $z = z^{cut}$, де z^{cut} – відстань на яке зміщена площина перетину, паралельна площині XOY . Для візуалізації використовується деяка модель гіперболоїдного шліфувального кола з досить великим кутом схрещування осей γ , а відповідно з досить великим кутом підйому витка $\gamma^{витка}$ й погрішністю профілю зуба, яку можна побачити «практично неозброєним оком». Для промальовки моделі підібрано наближення й положення спостерігача таким чином, щоб показати найбільш важливу в цей момент частину моделі (рис. 4).

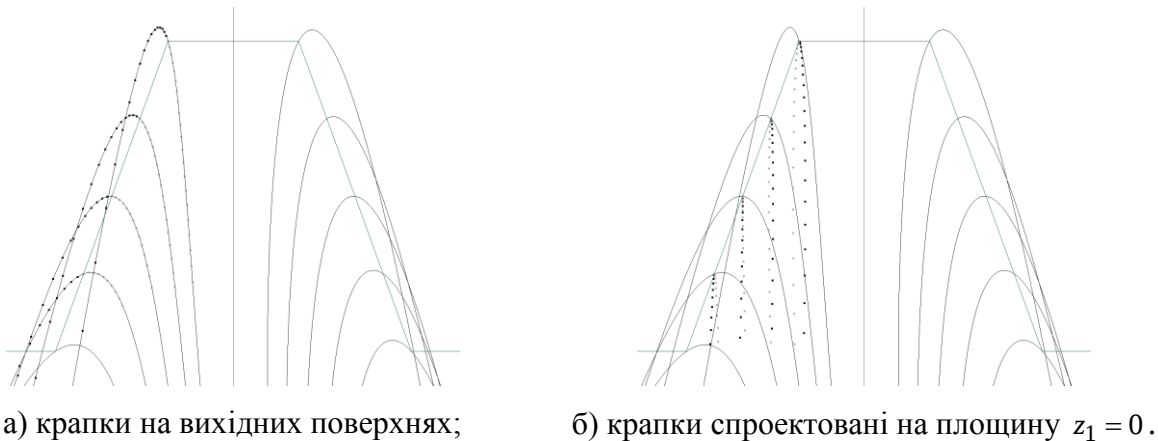


Рис. 4. Крапки контакту гіперболоїдного шліфувального кола й зубчастої рейки

На рис. 4 показані "усі" крапки приналежні гіперболоїдному шліфувальному колу, що перебувають у зоні потенційного контакту з одним боком одного зуба зубчастої рейки й приналежні січним площинам z^{cut} , побудованим з деяким кроком уздовж осі z . Світло-сірим показані крапки, які розташовані в позитивній частині півпростору ($P_z > 0$), а чорним – у негативному ($P_z \leq 0$). Візуально складно оцінити положення крапок P у момент коли нульова висота зубчастої рейки сполучитися із січної площину z^{cut} , тому представимо, що рухаючись із подачею S_2 гіперболоїдне шліфувальне коло буде накопичувати ці крапки на нульовій висоті, тобто в цьому випадку це $P^0(P_x; P_y; 0)$ (рис. 4б). Як видно з рис. 4б більшість крапок, які брали участь у зачепленні в певний момент часу просто "виходять" із нього, але частина крапок внаслідок гвинтової властивості поверхні продовжують контакт і спотворюють профіль зуба зубчастої рейки. Для того, щоб

досліджувати як сильно й у якому місці відбувається спотворення профілю, необхідно виділити із усіх крапок, ті що "не вписуються" в профіль зубчастої рейки. Таким чином, усі крапки $P^0(P_x; P_y; 0)$, для яких $dx > 0$ є причиною спотворення профілю зуба зубчастої рейки при віддаленні від $z^{cut} = 0 \text{ мм}$. Збільшимо кількість кривих. Досить велика кількість крапок дозволяє побачити форму викривлення профілю зуба зубчастої рейки (рис. 5).

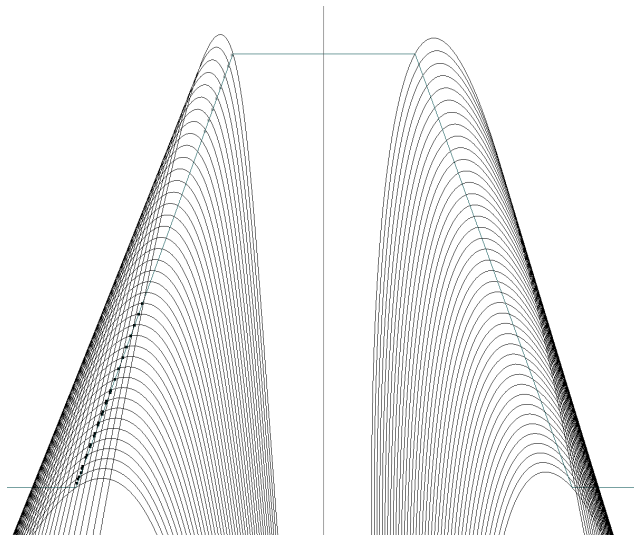


Рис. 5. Крапки контакту, спроектовані на площину $z_1 = 0$

З рис. 5 видно, що більше спотворення профілю зуба зубчастої рейки припадає на вершину її зуба й зменшується до ніжки зуба. Точну форму викривлення можна одержати заміривши максимальну величину різниці dx для всіх висот y_1 . Результати доповнюють модель новими характеристиками. Зробимо попередню процедуру з більшою точністю (більше число прорахунків з меншим кроком) і знайдемо такі крапки, що створюють найбільше викривлення профілю $dx > 0$ в околиці кожної із N_{y_1} крапок для лівої й правої сторони кожного зуба. Залежність викривлення форми зуба зубчастої рейки від висоти на якій проводиться вимір показаний на рис. 6 стовщеною лінією.

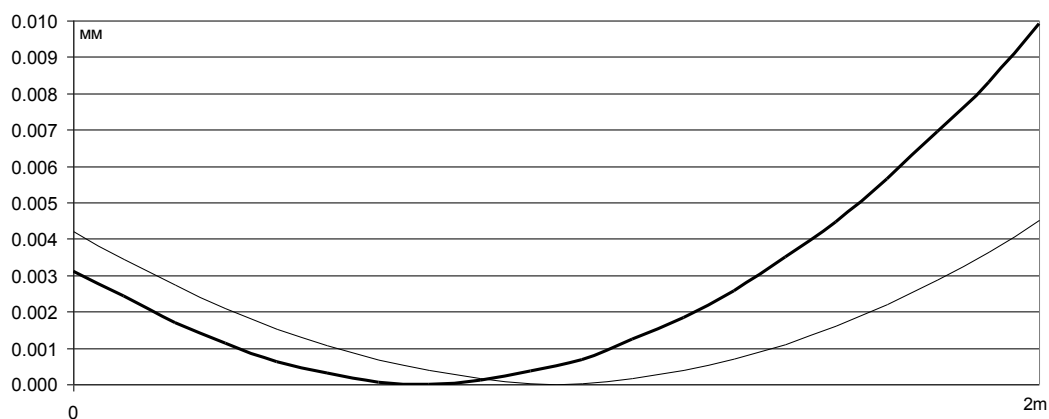


Рис. 6. Форма викривлення профілю зуба зубчастої рейки уздовж висоти зуба:

- обробка гіперболоїдним шліфувальним колом;
- обробка конволютним черв'ячним шліфувальним колом.

Для аналізу отриманої кривої зробимо її порівняння із кривою, отриманою аналогічними розрахунками для конволютного циліндричного черв'ячного шліфувального кола (рис. 6 тонка лінія). На рис. 6 нульове значення абсцис відповідає западині зуба, а максимальне значення N_{y1} – висота рівна $2m$. Як видно, форма спотворення профілю зуба зубчастої рейки при обробці гіперболоїдним і циліндричним шліфувальним колом для першого зуба рейки нагадує параболу, яка опирається на нуль і спрямована гілками нагору. Першим зубом зубчастої рейки вважається зуб, що перебуває в області горлового перетину гіперболоїдного шліфувального кола. Менше викривлення для гіперболоїдної форми припадає на третину висоти зуба зубчастої рейки й зростає, практично з однаковою швидкістю, до основи й головки зуба. Для циліндричної форми менше викривлення в середині зуба. Величина спотворення не має різких перепадів уздовж висоти зуба. Максимальна величина спотворення профілю припадає на саму верхню частину зуба на висоті $2m$ для гіперболоїдної форми й становить трохи більшу величину в порівнянні з результатом для циліндричної форми шліфувального кола. При цьому у основи зуба величина викривлення трохи менше. Імовірно, що величини спотворень інших зубів у випадку обробки циліндричним шліфувальним колом будуть ідентичними показаним, а для гіперболоїдного шліфувального кола будуть відмінності, що викликане складною просторовою формою. Вивчення їх величин вимагає додаткових досліджень.

Висновок

Отримані моделі й алгоритми дозволили досить наочно представити процеси взаємного впровадження поверхонь гіперболоїдного шліфувального кола й циліндричного зубчастого колеса, які приводять до спотворення профілю зуба останнього. Незважаючи на видиму, майже дворазову величину спотворення в порівнянні з обробкою шліфувальним колом циліндричної форми, проглядаються явні переваги. До них варто віднести нульове викривлення профілю зуба при обробці досить тонких коліс, що неможливо досягти циліндричною формою, яка буде давати однакову величину спотворення для будь-якої товщини зубчастого колеса. Крім того, збільшена зона охопту гіперболоїдного шліфувального кола дозволяє одержати більшу продуктивність. Продовженням вивчення даного питання може стати дослідження залежності максимальних величин спотворень профілю зуба циліндричного зубчастого колеса залежно від відстані до горлового перетину, а також від товщини, діаметра й модуля самого зубчастого колеса.

Список літератури

1. Гавриленко В.А., Осипова С.Д. *Определение оптимальных параметров начальных поверхностей колес эвольвентных гиперболоидных передач.* – Изв. вузов Машиностроение, 1969. – № 1.
2. Витренко В.А. *Повышение производительности зубонарезания цилиндрических зубчатых колес гиперболоидным инструментом за счет совершенствования формообразования резанием: монография/ В.А. Витренко, В.В. Белозерова.* -Луганск: «Ноулидж», 2009. — 147с.
3. Выгодский М.Я. *Дифференциальная геометрия.* – М.:Машигиз,1949. — 659с.
4. Воронов А.Э., Витренко В.А. *Компьютерное моделирование процесса формообразования гиперболоидного инструмента* // Вісник / Національний університет "Львівська політехніка"; № 746. – С. 13-17.
5. Стахин Н.А. *Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima. (ПО для решения задач аналитических (символьных) вычислений): Учебное пособие.* – / М. 2008. — 86 с.
6. Страуструп Б. *Язык программирования C++ / Бьерн Страуструп* // Специальное издание, 3 издание.- Изд-ва: Бином, Невский Диалект, 2004 г. — 1104 с.
7. *Официальный сайт компании Eclipse Foundation [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://eclipse.org>*