УДК 621.391:519.21

Р. М. Юзефович
Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

ОЦІНЮВАННЯ ВЗАЄМОСПЕКТРАЛЬНИХ КОМПОНЕНТІВ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Проаналізовано властивості оцінок взаємоспектральних компонентів, що знаходять на основі перетворень Фур'є згладжених оцінок взаємокореляційних компонентів. Виведено формули для зміщення та дисперсії оцінок, що описують залежність цих величин від довжини відрізка реалізації, точки усічення корелограми, форми згладжувального вікна та спектральних характеристик сигналу. Наведено приклад оцінювання взаємоспектральних компонентів амплітудно- та фазомодульованих сигналів.

Ключові слова: періодично нестаціонарні випадкові сигнали, взаємокореляційна функція, взаємоспектральна густина, дисперсія, зміщення оцінки.

R. M. Yuzefovych
Karpenko Physico-mechanical institute NAS Ukraine, Lviv

AN ESTIMATION OF CROSS-SPECTRAL COMPONENTS FOR PERIODICALLY NON-STATIONARY RANDOM PROCESSES

Correlations between harmonic components of random processes is a feature of signal non-stationarity. In the case of periodically non-stationary random processes (PNRP) correlate harmonics distant one from another on frequencies, what multiple to value T, T - period of non-stationarity [1, 2]. Since faults appearance in rotating elements of mechanical systems leads to periodical non-stationarity of vibration signals when searching of correlations between harmonic components can lay in the base for defects detection [1, 3–5]. For description of such correlations used spectral components, which are Fourier coefficients of varying spectral density and at the same time are the Fourier transformations of correlation components. For widening of vibration diagnostics capabilities reasonable to provide a cross-spectral analysis of vibration signals measured at different points of mechanical system. It gives possibility to investigate spatial properties of signals and to solve tasks of defects localization with higher effectiveness [6, 7].

The properties of cross-spectral components estimators, based on Fourier transformation of smoothed estimators of cross-correlation components, are analyzed. The formulae for estimator bias and variance, which describe dependence of these values on realization length, point of correlogram cutoff, smoothing window form and signal spectral characteristics, are derived. The examples of cross-spectral components estimation for amplitude- and phase modulated signals are given. It is proved that variances of cross-spectral components estimators depend on all of spectral components, which are present in Fourier decomposition of varying spectral density of periodically non-stationary random processes. It is shown that statistical analysis of stationary approximation of PNRP can not be made within stationary model but only within the PNRP, which approximation it is.

Key words: periodically non-stationary random signals, cross-correlation function, cross-spectral density, variance, estimator bias.

Вступ. Періодична нестаціонарність властива багатьом сигналам у телекомунікаційних системах, телеметрії, радіо- і гідролокації, вібродіагностиці, які є результатом різного типу взаємодії періодичності й стохастичності. Стохастична модуляція амплітуди, фази чи частоти синусоїдальної несучої в телекомунікаційних аналогових системах, маніпуляція тими самими величинами в цифрових модуляційних системах, сканування у телевізії, дискретизація і квантування, обертовий рух і випадкові збурення в механічних системах є прикладами такої взаємодії. Для її опису й аналізу успішно використовують математичні моделі у вигляді періодично нестаціонарних випадкових сигналів (ПНВС) [1–5], тобто таких процесів, для яких математичне сподівання $m(t)=E\xi(t)$ і кореляційна функція $b_\xi(t,u)=E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}(t)=\xi(t)-m(t)$ є періодичними функціями часу: $m(t)=m(t+T)$, $b(t,u)=b(t+T,u)$, де T – період нестаціонарності. Під час аналізу як одно-, так і багатоканальних систем передавання інформації, ідентифікації шляхів поширення сигналів, локалізації їх джерел необхідний взаємний спектральний аналіз сигналів, який ґрунтується на дослідженні миттєвої взаємної спектральної густини $f_{\xi\eta}(\omega,t)$, а також її коефіцієнтів Фур'є – взаємних спектральних компонентів $f_k^{(\xi\eta)}(\omega)$. Ці величини дають можливість дослідити характер корельованості між гармонічними складовими сигналу. Саме корельованість гармонік є ознакою нестаціонарності сигналів. У випадку ПНВС між собою корелюють тільки ті гармоніки, які віддалені одна від одної на частоти, що є кратними до величини $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$. Двочастотна спектральна густина тоді має вигляд

$$f_{\xi\eta}(\omega_1,\omega_2)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1)\delta(\omega_2-\omega_1+k\omega_0),$$

де $\delta(\omega)$ – дельта-функція Дірака. Миттєва спектральна густина $f_{\xi\eta}(\omega,t)$ визначається перетворенням Фур'є взаємокореляційної функції $b_{\xi\eta}(t,u)=E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}(t)=\xi(t)-m_\xi(t)$, $\overset{\circ}{\eta}(t)=\eta(t)-m_\eta(t)$, тобто

$$f_{\xi\eta}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b_{\xi\eta}(t,u)e^{-i\omega u}\mathrm{d}u.$$

Оскільки для ПНВС $b_{\xi\eta}(t,u)=b_{\xi\eta}(t+T,u)$ і

$$b_{\xi\eta}(t,u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} B_k^{(\xi\eta)}e^{ik\omega_0 t},$$

то

$$f_{\xi\eta}(\omega,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k^{(\xi\eta)}(\omega)e^{ik\omega_0 t},$$

де

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b_k^{(\xi\eta)}(u)e^{-i\omega u}\mathrm{d}u.$$

Зміщення оцінок взаємоспектральних компонентів. Для оцінювання взаємних спектральних характеристик на основі експериментальних даних можна використати як періодограмний метод А. Шустера, так і корелограмний метод Блекмана–Т'юкі, коли оцінки спектральних характеристик знаходять за допомогою перетворення Фур'є згладжених оцінок кореляційних характеристик. Оскільки періодограмний метод є окремим випадком методу Блекмана–Т'юкі, то в цій роботі для оцінювання взаємних спектральних компонентів використаємо тільки останній.

Оцінки взаємоспектральних компонентів можна отримати на основі оцінок змінної спектральної густини

$$\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)=\frac{1}{T}\int_0^T \hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)e^{-ik\omega_0 t}\mathrm{d}t, \qquad (1)$$

так і оцінок кореляційних компонентів

$$\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(u)\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)e^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u\,. \qquad (2)$$

Ураховуючи, що [1]

$$\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(u)\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)e^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u\,,$$

отримуємо

$$\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(u)e^{-\mathrm{i}\omega u}\left[\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(u)\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)e^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u\,.$$

Отже, статистики (1) і (2) збігаються, тому розглянемо тільки одну з них. Саме аналізу властивостей оцінки (2) і стосується ця стаття.

Приймемо, що

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t\,,$$

де оцінка $\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)$ визначається формулою

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)\eta(t+u+nT)-\hat{m}_{\xi}(t)\hat{m}_{\eta}(t+nT)\,.$$

при цьому

$$\hat{m}_{\xi}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)\,,$$

$$\hat{m}_{\eta}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\eta(t+nT)\,.$$

Беручи до уваги співвідношення

$$E\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)=b_{\xi\eta}(t,u)-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)b_{\xi\eta}(t,u+nT)\,,$$

отримуємо

$$E\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(u)\left[B_k^{(\xi\eta)}(u)-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)B_k^{(\xi\eta)}(t,u+nT)\right]e^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u\,.$$

Підставимо у цей вираз подання

$$k(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_1)e^{\mathrm{i}\omega_1 u}\mathrm{d}\omega_1\,, \qquad (3)$$

$$B_k^{(\xi\eta)}(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_k^{(\xi\eta)}(\omega_2)e^{\mathrm{i}\omega_2 u}\mathrm{d}\omega_2\,. \qquad (4)$$

Тоді

$$E\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_1)\,f_k^{(\xi\eta)}(\omega_2)\,g(\omega_2,N)\delta(\omega_1+\omega_2-\omega)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega-\omega_1)\,f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1)\left[1-g(\omega_1,N)\right]\mathrm{d}\omega_1\,,$$

де

$$g(\omega,N)=\frac{\sin^2\frac{\omega}{2}NT}{N^2\sin^2\frac{\omega}{2}T}\,.$$

Флуктуаційні складові цих виразів прямують до нуля при $N \to \infty$ і ця збіжність покращується зі збільшенням ширини спектрального вікна $\lambda(\omega)$. А для регулярної складової, припускаючи, що спектральні компоненти є досить гладкими функціями частоти, і використовуючи розклад їх в ряд Тейлора в околі точки ω

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1) = f_k^{(\xi\eta)}(\omega) - \left[f_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]^{/}\omega_1 + \left[f_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]^{//}\frac{\omega_1^2}{2} - \ldots,$$

в другому наближенні маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1)\lambda(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_1) f_k^{(\xi\eta)}(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1 \approx f_k^{(\xi\eta)}(\omega) + \left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_1^2\lambda(\omega_1)\mathrm{d}\omega_1\right]\left[f_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]^{//}.$$

Ідентичність цієї формули й аналогічного виразу для регулярної складової зміщення оцінки спектральної густини стаціонарного випадкового процесу дає можливість перенести на цей випадок всі ті висновки, які випливають з нього: а) менші зміщення мають оцінки гладших компонентів; б) оцінки мають занижені значення в області максимумів і завищені в області мінімумів; в) зміщення оцінок зменшуються, коли зменшується ширина спектрального вікна.

Дисперсія оцінок. Проведемо тепер аналіз дисперсії згладжених оцінок

$$D\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right] = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-u_m}^{u_m}\int_{-u_m}^{u_m} R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1,u_2)k(u_1)k(u_2)e^{\mathrm{i}\omega(u_2-u_1)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 .$$

Тут $R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1,u_2) = E\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u_1)\overline{\hat{B}}_k^{(\xi\eta)}(u_2) - E\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u_1)E\overline{\hat{B}}_k^{(\xi\eta)}(u_2)$ – кореляційна функція оцінок кореляційних компонентів, які в першому наближенні можна подати у вигляді

$$\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t .$$

Тоді

$$R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1,u_2) = \frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta} E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(t+u_1)\overset{\circ}{\xi}(s)\overset{\circ}{\eta}(s+u_1)e^{\mathrm{i}k\omega_0(s-t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t - B_k^{(\xi\eta)}(u_1)\overline{B}_k^{(\xi\eta)}(u_2) =$$

$$= \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta} b_{\zeta}(t,s-t,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}k\omega_0(s-t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t ,$$

де

$$b_{\zeta}(t,s-t,u_1,u_2) = b_{\xi}(t,s-t)b_{\eta}(t+u_1,s-t+u_2-u_1) + b_{\xi\eta}(t,s-t+u_2)b_{\xi\eta}(s,t-s+u_1) .$$

Подавши функцію $b_{\zeta}(t,s-t,u_1,u_2)$ у вигляді ряду Фур’є

$$b_{\zeta}(t,s-t,u_1,u_2) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \tilde{B}_l^{(\xi\eta)}(s-t,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}l\omega_0 t} ,$$

маємо

$$R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1,u_2) = \frac{1}{\theta^2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{\mathrm{i}l\omega_0 t}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta}\tilde{B}_l^{(\xi\eta)}(s-t,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}k\omega_0(s-t)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 =$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left[\int_{-\theta}^{0}\tilde{B}_l(u,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}k\omega_0 u} f_l(-u,\theta)\mathrm{d}u + \int_0^{\theta}\tilde{B}_l(u,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}k\omega_0 u} f_l(0,\theta-u)\mathrm{d}u\right],$$

при цьому

$$f_l(u,\theta) = \frac{1}{\theta}\int_u^{\theta} e^{\mathrm{i}l\omega_0 u}\mathrm{d}u .$$

Нехтуючи складовими, що містять функцію $f_l(u,\theta)$, $l \neq 0$, як величинами вищого порядку малості, приходимо до виразу

$$R_{\hat{B}_k^{(\xi\eta)}}(u_1,u_2) = \frac{1}{\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\left(1-\frac{|u|}{\theta}\right)\tilde{B}_0^{(\xi\eta)}(u,u_1,u_2)e^{\mathrm{i}k\omega_0}\mathrm{d}u ,$$

а звідси

$$D\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]=\frac{1}{4\pi^2\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(u_1)k(u_2)\left[\int_{-\theta}^{\theta}\left(1-\frac{|u_1|}{\theta}\right)\tilde{B}_0(u,u_1,u_2)e^{ik\omega_0 u}\mathrm{d}u\right]e^{ik\omega_0(u_2-u_1)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 .$$

Оскільки

$$\tilde{B}_0(u,u_1,u_2)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}e^{-il\omega_0 u_1}\left[B_l^{(\xi)}(u)\bar{B}_l^{(\eta)}(u+u_2-u_1)+B_l^{(\xi\eta)}(u+u_2)\bar{B}_l^{(\eta\xi)}(u-u_1)\right],$$

то

$$D\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]=\frac{1}{\theta}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{-\theta}^{\theta}\left(1-\frac{|u|}{\theta}\right)\left[\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(u_1)k(u_2)\left[B_l^{(\xi\eta)}(u)B_{-l}^{(\xi\eta)}(u+u_2-u_1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_l^{(\eta\xi)}(u+u_2)B_{-l}^{(\eta\xi)}(u-u_1)\right]e^{-il\omega_0 u_1}e^{-i\omega(u_2-u_1)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\right]e^{ik\omega_0 u}\mathrm{d}u .$$

Ураховуючи (3) і (4), а також подання

$$B_k^{(\xi)}(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_k^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}\mathrm{d}\omega,$$

$$B_k^{(\eta)}(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_k^{(\eta)}(\omega)e^{i\omega u}\mathrm{d}\omega,$$

знаходимо:

$$D\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f_l^{(\xi)}(\omega_1)f_{-l}^{(\eta)}(\omega_2)\lambda(\omega+\omega_2)\lambda(\omega+\omega_0+l\omega_0)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\varphi(\omega_1+\omega_2+k\omega_0,\theta)+\lambda(\omega+\omega_1)\lambda(\omega-\omega_2)\varphi(\omega_1-\omega_2+(k-l)\omega_0,\theta)\right]\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2\right\}, \qquad (5)$$

де

$$\varphi(\omega,\theta)=\frac{1}{\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\left(1-\frac{|u_1|}{\theta}\right)e^{i\omega u}\mathrm{d}u=\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta}e^{i\omega(s-t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\frac{1}{\omega^2\theta^2}\left(e^{i\omega\theta}-1\right)\left(e^{-i\omega\theta}-1\right)=\frac{2}{\theta^2\omega^2}(1-\cos\omega\theta)=\frac{\sin^2\frac{\omega\theta}{2}}{\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)^2}.$$

Для першої складової формули (5) в першому наближенні маємо:

$$D^{(1)}\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]\approx f_0^{(\eta)}(\omega_2)\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega+\omega_2)f_0^{(\xi)}(\omega_1)\varphi(\omega_1+\omega_2+k\omega_0,\theta)\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 .$$

Можна також наближено прийняти, що

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_0^{(\xi)}(\omega_1)\varphi(\omega_1+\omega_2+k\omega_0)\mathrm{d}\omega_1\approx f_0^{(\xi)}(\omega_2+k\omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega_1+\omega_2+k\omega_0)\mathrm{d}\omega_1=$$

$$=\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta}e^{i(\omega_2+k\omega_0)(s-t)}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_1(s-t)}\mathrm{d}\omega_1\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{\theta}f_0^{(\xi)}(\omega_2+k\omega_0),$$

а тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega+\omega_2)f_0^{(\xi)}(\omega_2+k\omega_0)\mathrm{d}\omega_2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega_1)f_0^{(\xi)}(\omega-\omega_1-k\omega_0)\mathrm{d}\omega_1\approx$$

$$\approx f_0^{(\xi)}(\omega-k\omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega_1)\mathrm{d}\omega_1=W(0)f_0^{(\xi)}(\omega-k\omega_0).$$

Відтак

$$D^{(1)}\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]\approx\frac{2\pi}{\theta}W(0)f_0^{(\eta)}(\omega)f_0^{(\xi)}(\omega-k\omega_0).$$

Другу складову співвідношення перепишемо у вигляді

$$D^{(2)}\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]\approx\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_l^{(\xi\eta)}(-\omega)f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega-\omega_2)\lambda(\omega+\omega_1)\left[\frac{1}{\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\left(1-\frac{|u|}{\theta}\right)e^{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2+(k-l)\omega_0)u}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 .$$

Легко бачити, що

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega-\omega_2)\lambda(\omega+\omega_1)e^{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)u}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(u_1)k(u_2)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}\omega_1(u+u_2)}\mathrm{d}\omega_1\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{i}\omega_2(u+u_1)}\mathrm{d}\omega_2\right]e^{\mathrm{i}\omega(u_1+u_2)}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2=k^2(u)e^{-\mathrm{i}\omega_0 u},$$

$$\frac{1}{\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)e^{\mathrm{i}[(k-l)\omega_0-2\omega]u}e^{\mathrm{i}2\omega_0 u}k^2(u)\mathrm{d}u=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}W^2(\omega_1)\left[\frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta}e^{\mathrm{i}[\omega_1-2\omega+(k-l)\omega_0]}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega_1\approx W\left[2\omega-(k-l)\omega_0\right]\frac{2\pi}{\theta},$$

а тоді

$$D^{(2)}\left[\hat{f}_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]\approx\frac{2\pi}{\theta}\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_l^{(\xi\eta)}(-\omega)f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega)W\left[2\omega-(k-l)\omega_0\right].$$

Оскільки

$$f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega)=\overline{f_l^{(\eta\xi)}}(\omega+l\omega_0),$$

$$f_l^{(\xi\eta)}(-\omega)=f_l^{(\eta\xi)}(\omega+l\omega_0),$$

для дисперсії оцінки (2) маємо

$$D\left[f_k^{(\xi\eta)}(\omega)\right]=\frac{2\pi}{\theta}\left[W(0)\,f_0^{(\xi)}(\omega-k\omega_0)\,f_0^{(\eta)}(\omega)+\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|f_l^{(\eta\xi)}(\omega+l\omega_0)\right|^2W\big(2\omega-(k-l)\omega_0\big)\right]. \qquad (6)$$

З цієї формули випливає, що дисперсії оцінок взаємоспектральних компонентів залежать від усіх тих спектральних компонентів, які містяться у розкладі в ряд Фур'є змінної спектральної густини ПНВП. А це означає, що, визначаючи похибки оцінювання навіть взаємоспектральної густини стаціонарного наближення ПНВП, не можна обмежуватися тільки характеристиками цього наближення. Отже, статистичний аналіз стаціонарного наближення ПНВП аж ніяк не можна виконати у межах стаціонарної моделі, а тільки в межах того ПНВП, наближенням якого він є.

Оцінки взаємоспектральних компонентів амплітудно- і фазомодульованих сигналів. Конкретизуємо формулу (6) для одного з найпростіших типів ПНВП – квадратурної моделі:

$$\xi(t)=\mu_c(t)\cos\omega_0 t+\mu_s(t)\sin\omega_0 t$$

$$\eta(t)=\nu_c(t)\cos\omega_0 t+\nu_s(t)\sin\omega_0 t .$$

У цьому випадку

$$b_\xi(t,u)=B_0^{(\xi)}(u)+C_2^{(\xi)}(u)\cos 2\omega_0 t+S_2^{(\xi)}(u)\sin 2\omega_0 t ,$$

$$b_\eta(t,u)=B_0^{(\eta)}(u)+C_2^{(\eta)}(u)\cos 2\omega_0 t+S_2^{(\eta)}(u)\sin 2\omega_0 t ,$$

$$b_{\xi\eta}(t,u)=B_0^{(\xi\eta)}(u)+C_2^{(\xi\eta)}(u)\cos 2\omega_0 t+S_2^{(\xi\eta)}(u)\sin 2\omega_0 t ,$$

де

$$B_0^{(\xi)}(u)=\frac{1}{2}\left[R_{\mu_c}(u)+R_{\mu_s}(u)\right]\cos\omega_0 u+R_{\mu_c\mu_s}^{-}(u)\sin\omega_0 u , \qquad (7)$$

$$C_2^{(\xi)}(u)=\frac{1}{2}\left[R_{\mu_c}(u)-R_{\mu_s}(u)\right]\cos\omega_0 u+R_{\mu_c\mu_s}^{+}(u)\sin\omega_0 u ,$$

$$S_2^{(\xi)}(u)=R^{+}_{\mu_c\mu_s}(u)\cos\omega_0 u+\frac{1}{2}\left[R_{\mu_s}(u)-R_{\mu_c}(u)\right]\sin\omega_0 u\,,$$

$$B_0^{(\eta)}(u)=\frac{1}{2}\left[R_{\nu_c}(u)+R_{\nu_s}(u)\right]\cos\omega_0 u+R^{-}_{\nu_c\nu_s}(u)\sin\omega_0 u\,, \tag{8}$$

$$C_2^{(\eta)}(u)=\frac{1}{2}\left[R_{\nu_c}(u)-R_{\nu_s}(u)\right]\cos\omega_0 u+R^{+}_{\nu_c\nu_s}(u)\sin\omega_0 u\,,$$

$$S_2^{(\eta)}(u)=R^{+}_{\nu_c\nu_s}(u)\cos\omega_0 u+\frac{1}{2}\left[R_{\nu_s}(u)-R_{\nu_c}(u)\right]\sin\omega_0 u\,,$$

$$B_0^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{2}\left[R_{\mu_c\nu_c}(u)+R_{\mu_s\nu_s}(u)\right]+\frac{1}{2}\left[R_{\mu_c\nu_c}(u)-R_{\mu_s\nu_s}(u)\right]\sin\omega_0 u\,, \tag{9}$$

$$C_2^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{2}\left[R_{\mu_c\nu_c}(u)-R_{\mu_s\nu_s}(u)\right]\cos\omega_0 u+\frac{1}{2}\left[R_{\mu_c\nu_s}(u)+R_{\mu_s\nu_c}(u)\right]\sin\omega_0 u\,,$$

$$S_2^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{2}\left[R_{\mu_c\nu_s}(u)+R_{\mu_s\nu_c}(u)\right]\cos\omega_0 u+\frac{1}{2}\left[R_{\mu_s\nu_s}(u)-R_{\mu_c\nu_c}(u)\right]\sin\omega_0 u\,.$$

Автокореляційні компоненти, як видно, визначаються авто- та взаємокореляційними функціями квадратурних складових кожного з процесів, а також взаємокореляційними функціями квадратурних складових різних процесів. Знаками “+” і “–” в останніх складових позначені парна й непарна частини відповідних взаємокореляційних функцій.

Для комплекснозначних кореляційних компонентів знаходимо:

$$B_2^{(\xi)}(u)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[R_{\mu_c}(u)-R_{\mu_s}(u)\right]-iR_{\mu_c\mu_s}(u)\right]e^{i\omega_0 u}\,,$$

$$B_2^{(\eta)}(u)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[R_{\nu_c}(u)-R_{\nu_s}(u)\right]-iR_{\nu_c\nu_s}(u)\right]e^{i\omega_0 u}\,,$$

$$B_2^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{4}\left[R_{\mu_c\nu_c}(u)-R_{\mu_s\nu_s}(u)-i\left[R_{\mu_c\nu_s}(u)+R_{\mu_s\nu_c}(u)\right]\right]e^{i\omega_0 u}\,.$$

Враховуючи ці вирази, а також співвідношення (7)–(9), які визначають нульові кореляційні компоненти, для спектральних компонентів отримуємо:

$$f_0^{(\xi)}(\omega)=\frac{1}{4}\left[f_{\mu_c}(\omega+\omega_0)+f_{\mu_c}(\omega-\omega_0)+f_{\mu_s}(\omega+\omega_0)+f_{\mu_s}(\omega-\omega_0)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\operatorname{Im} f_{\mu_c\mu_s}(\omega+\omega_0)-\operatorname{Im} f_{\mu_c\mu_s}(\omega-\omega_0)\right],$$

$$f_0^{(\eta)}(\omega)=\frac{1}{4}\left[f_{\nu_c}(\omega+\omega_0)+f_{\nu_c}(\omega-\omega_0)+f_{\nu_s}(\omega+\omega_0)+f_{\nu_s}(\omega-\omega_0)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\operatorname{Im} f_{\nu_c\nu_s}(\omega+\omega_0)-\operatorname{Im} f_{\nu_c\nu_s}(\omega-\omega_0)\right],$$

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega)=\frac{1}{4}\left[f_{\mu_c\nu_c}(\omega+\omega_0)+f_{\mu_s\nu_s}(\omega+\omega_0)+f_{\mu_s\nu_s}(\omega-\omega_0)\right]-$$
$$-i\left[f_{\mu_c\nu_s}(\omega-\omega_0)-f_{\mu_c\nu_s}(\omega+\omega_0)-f_{\mu_s\nu_c}(\omega-\omega_0)+f_{\mu_s\nu_c}(\omega+\omega_0)\right],$$

$$f_2^{(\xi)}(\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[f_{\mu_c}(\omega-\omega_0)-f_{\mu_s}(\omega+\omega_0)\right]-i\operatorname{Re} f_{\mu_c\mu_s}(\omega-\omega_0)\right],$$

$$f_2^{(\eta)}(\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[f_{\nu_c}(\omega-\omega_0)-f_{\nu_s}(\omega+\omega_0)\right]-i\operatorname{Re} f_{\nu_c\nu_s}(\omega-\omega_0)\right],$$

$$f_2^{(\xi\eta)}(\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[f_{\mu_c\nu_c}(\omega-\omega_0)-f_{\mu_s\nu_s}(\omega+\omega_0)\right]-i\left[f_{\mu_c\nu_s}(\omega-\omega_0)-f_{\mu_s\nu_c}(\omega-\omega_0)\right]\right].$$

Конкретизуючи вигляд авто- та взаємокореляційних функцій модулюючих процесів та підставляючи отримані вирази у співвідношення

$$D\left[\hat{f}_0^{(\xi\eta)}(\omega)\right]=\frac{2\pi}{\theta}\left[W(0)\,f_0^{(\xi)}(\omega)\,f_0^{(\eta)}(\omega)+W(2\omega)\left|f_0^{(\xi\eta)}(\omega)\right|^2+\right.$$

$$\left.+W\left[2(\omega-\omega_0)\right]\left|f_{-2}^{(\eta\xi)}(\omega-2\omega_0)\right|^2+W\left[2(\omega+\omega_0)\right]\left|f_2^{(\eta\xi)}(\omega+2\omega_0)\right|^2\right],$$

$$D\left[\hat{f}_2^{(\eta\xi)}(\omega)\right]=\frac{2\pi}{\theta}\left[W(0)\,f_0^{(\eta)}(\omega)\,f_0^{(\xi)}(\omega-2\omega_0)+\left|f_0^{(\eta\xi)}(\omega)\right|W\left[2(\omega-\omega_0)\right]-\right.$$

$$\left.+\left|f_{-2}^{(\eta\xi)}(\omega-2\omega_0)\right|^2W\left[2(\omega-2\omega_0)\right]+\left|f_2^{(\eta\xi)}(\omega+2\omega_0)\right|^2W(2\omega)\right.,$$

можемо проаналізувати залежність дисперсії оцінки взаємоспектральної густини від довжини реалізації, точки усічення корелограми, форми вибраного вікна і параметрів сигналу.

Висновки. Отримані в роботі співвідношення дають можливість знайти систематичну та середньоквадратичну похибки обчислення оцінок взаємоспектральних компонентів періодично нестаціонарних випадкових сигналів, які отримують на основі згладжених оцінок взаємокореляційних компонентів. На їх основі також може бути розв'язана зворотна задача, а саме обґрунтовано вибрані такі параметри обробки (довжина відрізка реалізації, точка усічення корелограми), які забезпечать необхідні похибки оцінювання.

1. Яворський І.М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів: ФМІ НАН України, 2013. – 804 с. 2. Hurd H.L., Miamee A. Periodically Correlated Random Sequences. Spectral Theory and Practice. – New Jersey: Wiley-Interscience, 2007. – 353 p. 3. Napolitano A. Generalizations of Cyclostationarity Signal Processing. Spectral Analysis and applicatons. – John Wiley & Song, 2012. – 480 p. 4. Antoni J. Cyclostationarity by examples // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2009. – Vol. 23. – P. 987–1036. 5. Методи та засоби ранньої вібродіагностики підшипникових вузлів турбоагрегатів ТЕС / Яворський І.М., Кравець І.Б., Юзефович Р.М., Мацько І.Й., Стецько І.Г. // Енергетика та електрифікація. – № 8 (348). – Київ, 2012. – С. 58–67. 6. Віброакустична система ВАС-1 для ранньої вібраційної діагностики обертових механізмів / Яворський І.М., Кравець І.Б., Юзефович Р.М., Мацько І.Й., Стецько І.Г., Луферчик П.П. // Наука та інновації. – 2013. – № 3. – С. 31–38. 7. Інформаційно-вимірювальна система для багатомірної вібраційної діагностики / Яворський І.М., Кравець І.Б., Юзефович Р.М., Мацько І.Й., Стецько І.Г. // Проблемы машиностроения. – 2013. – Т. 16. – № 3. – С. 45–50.