УДК 528.2/.3:551.24

ТАДЄЄВ О. А.

Кафедра геодезії та картографії, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне 33028, Україна, тел. +38(096)7488449, ел. пошта: oleksandrtad@gmail.com

ОЦІНЮВАННЯ ТРИВИМІРНИХ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ПОЛІВ ЗЕМЛІ МЕТОДАМИ ПРОЕКТИВНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ГОЛОВНІ ЛІНІЙНІ ДЕФОРМАЦІЇ

Мета. Розв’язання завдання оцінювання деформацій топографічної поверхні Землі методами проективно-диференціальної геометрії, спрямоване на вираження метричного тензора простору і групи параметрів головних лінійних деформацій в геоцентричній просторовій системі координат. **Методика.** Розв’язання завдання ґрунтується на використанні властивостей гомеоморфізму перетворення (відображення) тривимірної замкненої неперервної області простору за гіпотези, що це перетворення має геофізичне походження і спричинене деформацією. За умови відповідності базових функцій вимогам гомеоморфізму, функціональна модель перетворення здатна передавати різними характеристиками зміну метричних властивостей області, які, за прийнятої гіпотези, є параметрами її деформації. Основним їх носієм є метричний тензор тривимірного евклідового простору. Тензор формується метричною формою перетвореної області простору – квадратом довжини лінійного елемента, вираженого за диференціалами координат області перетворення з урахуванням повних диференціалів базових функцій. **Результати.** Розв’язання завдання здійснено за умови, що область перетворення простору окреслена топографічною поверхнею Землі і координована в геоцентричній тривимірній прямокутній системі. Результатом розв’язання є робочі формули для обчислення головних просторових лінійних деформацій – коефіцієнтів розширення, стиснення та зсуву топографічної поверхні. Напрями цих показників визначено в геоцентричній полярній системі. Різні коефіцієнти розширень та їх напрями виражені в компонентах метричного тензора. Одержано формули для обчислення параметрів у довільному заданому напрямі, вздовж напрямів координатних осей, в проекціях на координатні площини, а також для тріади їх екстремальних значень з відповідною просторовою орієнтацією. **Наукова новизна і практична значущість.** Обґрунтовано, що при дослідженнях деформаційних полів Землі методи проективно-диференціальної геометрії мають більші потенційні можливості порівняно з методами лінійної механіки суцільного середовища і забезпечують узагальнені розв’язки. Гомеоморфна функціональна модель, як основа формування тензора, дає змогу виражати деформації будь-якого характеру. Одержано розрахункові формули для вираження головних лінійних деформацій. Результати придатні для оцінювання тривимірних деформаційних полів будь-яких масштабів. Параметри деформації віднесені безпосередньо до топографічної поверхні Землі. Достатнє покриття Землі GNSS-станціями і репрезентативні дані спостережень, що визначає повноту побудови функціональної моделі, разом з одержаними результатами здатні забезпечити оцінки та інтерпретацію реальних деформацій, а не віднесених до традиційних модельних референцних поверхонь.

Ключові слова: просторові деформації Землі; топографічна поверхня; відображення простору; метрична форма простору; метричний тензор простору; коефіцієнт лінійного спотворення

Вступ

Дослідження деформаційних полів Землі – одне з актуальних завдань сучасної геодинаміки, яке вирішується комплексно на основі міждисциплінарної співпраці широкого кола природничих наук. Мету і зміст досліджень з використанням геодезичної галузі знань визначають резолюції Міжнародної асоціації геодезії IAG (International Association of Geodesy) у рамках діяльності підкомісії 3.2 “Деформації земної кори” комісії 3 “Обертання Землі та геодинаміка”. Серед іншого, цілями їх роботи є “дослідження деформацій земної кори усіх масштабів від глобальної тектоніки плит до локальних деформацій, … розвиток і координація міжнародних програм зі спостереження, аналізу та інтерпретації даних деформаційних полів” [International Association…].

Прикладні аспекти досліджень проблеми складають основу діяльності робочої групи 6.1 “Вимірювання та аналіз деформацій” комісії 6 “Інженерні вишукування” Міжнародної федерації геодезистів FIG (International Federation of Surveyors) [International Federation …].

Наслідком тісного співробітництва між двома найбільш важливими міжнародними геодезичними організаціями в області досліджень проблеми стало створення спільної робочої групи IAG/FIG 0.2.1 “Нові технології для моніторингу деформацій та ліквідації наслідків природних катастроф”. Своєю діяльністю робоча група забезпечує координацію міждисциплінарних підходів до моніторингу деформаційних полів природних та інженерних об'єктів, розробку методів опрацювання та аналізу часових рядів спостережень на теоретичному рівні, інноваційних алгоритмів обробки даних, статичного та динамічного моделювання деформацій тощо. Основним джерелом кількісної інформації для вирішення поставлених задач визначено дані спостережень у мережах перманентних GNSS-станцій. Теоретичною основою досліджень вже традиційно використовується лінійно-однорідна модель механіки суцільного середовища. Результати діяльності робочої групи, а також науково-прикладні аспекти досліджень проблеми усією геодезичною спільнотою обговорюються на постійно діючих спільних (IAG/FIG) міжнародних симпозіумах з моніторингу деформацій, наприклад [Joint …].

Аналіз досліджень та невирішені частини загальної проблеми

Повторні геодезичні виміри, проведені на фізичній поверхні Землі, надають інформацію дискретного характеру лише про переміщення пунктів або їх швидкості, а оцінки деформацій поверхні – це результат того чи іншого моделювання вхідних геодезичних даних. Беручи до уваги специфіку методів побудови класичних геодезичних мереж, але розуміючи, що деформація є безперервне просторове явище, такі дані традиційно поділяють на горизонтальну і вертикальну складові частини. Аргументують цей поділ також і з геофізичної точки зору: геотектонічні процеси, які впливають на горизонтальні рухи поверхні, мають інший характер порівняно з тими, що позначаються на вертикальних. Поділом на складові частини визначається область застосування геодезичних даних у моделюванні деформаційних полів Землі – площини двовимірного чи тривимірного простору, геосфера, еліпсоїд, топографічна (фізична) поверхня Землі. Обчислюючи параметри деформації, їх відносять до однієї з перелічених поверхонь. Здебільшого дослідженню підлягає змодельована горизонтальна складова деформації в проекції на площину чи криволінійні сферичну або еліпсоїдальну поверхні. Ґрунтуючись на теорії нескінченно малої локально-однорідної лінійної деформації суцільного середовища, всі використовувані методики оцінюють лише лінійне наближення тензора деформації на площині з прямокутною системою координат або на площині, яка дотична до криволінійної поверхні із сферичною чи еліпсоїдальною параметризацією. Змодельоване на такій основі горизонтальне наближення виправдане при опрацюванні геодезичних мереж локального масштабу, коли похибки проекції фізичної поверхні (а також криволінійних референцних поверхонь) на площину є незначними.

Особливе місце у дослідженнях посідають методи тривимірного моделювання деформацій. Опираючись на ту ж теорію і використовуючи результати вимірів на пунктах просторових геодезичних мереж (спочатку суміщених класичних планових і висотних, а згодом і мереж перманентних GNSS-станцій), розв'язки завдання досягнуто тривимірним методом скінченних елементів. Метод було реалізовано в прямокутній системі координат на симплексах тривимірного простору – тетраедрах [Есиков, 1979; Brunner, 1979], на елементах чотирикутної форми [Kiamehr, Sjoberg, 2005], а також, використовуючи метод найменших квадратів, на скінченних елементах довільних геометричних форм [Reilly, 1987; Pietrantonio, Riguzzi, 2004]. Перелічені посилання складають лише мізерну частку посеред загального обсягу такого роду досліджень. Інваріанти деформації, як кінцевий результат опрацювання даних і основа інтерпретації явища, відносяться до барицентрів обраних просторових геометричних фігур, але не до топографічної чи будь-якої референцної поверхні. Такий підхід має перспективу при оцінюванні локальних деформацій верхніх горизонтів земної кори з апріорі визначеною геолого-геофізичною структурою в умовах пересіченого рельєфу або, гіпотетично, за умови проведення вимірів зміщень на певній глибині відносно фізичної поверхні. Однак він позбавлений можливості узагальнення розв'язків та їх використання на територіях з відсутньою подібного роду інформацією. Адже у цьому випадку виникає потреба екстраполяції геодезичних даних вглиб Землі, що із зрозумілих причин позбавлене всякого логічного змісту.

Вагомим мотивом для переосмислення теоретичних основ деформаційного аналізу стало запровадження у геодезичну практику сучасних супутникових навігаційних технологій, які ґрунтуються на використанні глобальних систем супутникового позиціонування і реалізовані в мережах перманентних GNSS-станцій. Результати моніторингу просторових координат станцій дали змогу підвищити ефективність вирішення багатьох задач сучасної геодинаміки. Разом з тим, їх використання породило проблеми, пов'язані з необхідністю вироблення нових моделей та методів опрацювання даних.

Оригінальний за змістом розв'язок задачі подано в статті [Savage et al., 2001]. Допускаючи сферичність Землі, вхідними даними використано координати λ, φ, r (схід, північ та зеніт) у локальній сферичній системі. Вони одержані перетвореннями геоцентричних просторових координат. Компоненти тривимірного тензора деформації у сферичних координатах виражені на основі математичної теорії пружності [Love, 1944] апроксимацією зміщень рядами Тейлора з використанням методу найменших квадратів.

Тензор деформації віднесений до частини сферичної поверхні, для якої встановлено локальну систему координат, тому він здатний описати тільки горизонтальні деформації. Свідомо нехтуючи вертикальними рухами Землі, автори вважають беззаперечним позитивом пропонованого розв'язку можливість оцінювання вектора обертання досліджуваної локальної поверхні навколо умовного полюсу, який фіксує координата r. Як третю складову тривимірного тензора, його пов'язано з жорстким обертанням Землі навколо вектора Ейлера. Вироблена методика знайшла практичне застосування при оцінюванні локальних деформаційних полів, наприклад, у дослідженнях [Savage et al., 2004; Hammond, Thatcher, 2004, 2007; Kreemer et al., 2009] тощо. Хоча на такій основі й оцінюється тривимірний тензор, він, однак, не виражає просторових деформацій Землі.

Просторові координати GNSS-станцій забезпечують описування фізичної поверхні Землі криволінійною поверхнею, яка вбудована в тривимірний евклідовий простір з умовним початком у геоцентрі. Наявність таких даних зумовила вироблення методичних підходів до вирішення проблеми, які здатні забезпечити оцінювання не лише горизонтальних, а й вертикальних складових деформаційних полів, а в перспективі – просторових деформацій Землі, які віднесені до її топографічної поверхні.

Перші змістовні дослідження проблеми у цьому напрямі подано, наприклад, у працях [Xu, Grafarend, 1996; Altiner, 1999; Voosoghi, 2000; Grafarend, Voosoghi, 2003]. Дослідження ґрунтуються на диференціальному поданні поверхонь в теорії пластин і оболонок механіки суцільного середовища. Вирішення проблеми розглядається з двох точок зору. Перша – зовнішнє моделювання деформацій. Цей підхід передбачає моделювання криволінійної топографічної поверхні Землі у тривимірному просторі з наступним оцінюванням тривимірних тензорів деформації і пов'язаних з ними інваріантів. Він міг би забезпечити ідеальну, з погляду пізнання явища, інтерпретацію деформаційних полів, але з причини складних диференціальних формулювань не має на сьогоднішній день належних математичних розв'язків. Друга точка зору – внутрішнє моделювання деформацій земної поверхні як градуйованої двовимірної криволінійної поверхні, яка вкладена в тривимірний простір, з оцінюванням відповідних двовимірних тензорів. Автори досліджень вважають, що такий підхід здатний забезпечити оцінки просторових деформацій, які віднесені до топографічної поверхні Землі окремо в горизонтальній та вертикальній складових частинах. Аргументації такого рішення наступні. Подання горизонтальної складової забезпечує методика геометричного моделювання змін метрики поверхні, яка заснована на вираженні тензора деформації Ейлера-Лагранжа першого роду. Така методика вже традиційно використовується при інтерпретації деформаційних полів. Вертикальні деформації описують пов'язані інваріанти тензора обертання і тензора Ейлера-Лагранжа другого роду, який виражає зміни Гауссової кривини вздовж нормалі до поверхні. Таке інноваційне вирішення завдання значно розширює інформативні можливості геодезичних методів моніторингу деформаційних полів. Реалізації розв'язків завдання постійно вдосконалюються і останніми роками активно впроваджуються в дослідницьку практику. Деякі оптимізаційні математичні розв'язки подано, наприклад, у статтях [Moghtased-Azar, Grafarend, 2009; Hossainali et al., 2011a, 2011b; Grafarend, 2012].

Однак аргументації авторів останніх досліджень щодо віднесення тензорів та їх інваріантів до топографічної поверхні Землі щонайменше сумнівні. Підтвердженням цьому є зміст терміну "внутрішнє моделювання деформацій земної поверхні як градуйованої двовимірної криволінійної поверхні", а також деякі приклади практичної реалізації пропонованої методики. Так, градуйоване подання поверхні викликає потребу її поділу на скінченні елементи. Результат подібного поділу ще називають грідом. Гіпотетично грід на топографічній поверхні Землі можна було б реалізувати, але він навряд чи можливий у найближчій перспективі, оскільки для цього завчасно поверхню потрібно параметризувати. З геометричної точки зору топографічна поверхня надзвичайно складна і не підлягає параметризації традиційними способами навіть у рамках такої її моделі як геоїд. При реалізації методики, наприклад, як це подано у [Voosoghi, 2000; Altiner et al., 2006], за параметризовану поверхню автори приймають еліпсоїд. Здійснюючи його поділ на еліпсоїдальні трикутники [Voosoghi, 2000] чи чотирикутники [Altiner et al., 2006], обчислені згодом тензори та їх інваріанти відносяться до барицентрів цих геометричних фігур, але не до топографічної поверхні Землі. На наш погляд, такий недолік зумовлений теоретичною основою, на якій досягнуто описані вище розв'язки.

Методи розв'язання завдання на такій теоретичній основі мають ще один недолік – усі розв'язки здатні виразити лише лінійну складову частину деформаційних полів. Загальновідомо, що просторово-часові закономірності реальних деформацій Землі мають більш складну природу порівняно з лінійними. Цей факт посвідчено навіть емпіричними розрахунками, наприклад, у статті [Тадєєва та ін., 2012]. Інше, формальне, підтвердження наступне. Якщо поле зміщень апроксимувати довільними нелінійними функціями і значення членів другого і вище порядків при розкладанні одержаних емпіричних формул в ряд виявляться значимими порівняно із значенням члена розкладу першого (лінійного) порядку чи самим зміщенням, тим самим теж підтвердиться факт нелінійного просторового розподілу зміщень. Однак констатований факт використовуваними методиками не враховується: яке б функціональне подання поля зміщень не було обране, тензор деформації описує тільки його лінійну складову частину. Адже у детерміністичних відношеннях "функція-тензор" на засадах механіки суцільного середовища присутня не сама функція, яка виражає деформацію, а лише її локальне лінійне наближення у нескінченно малому масштабі. При формуванні тензора апроксимуючі функції підлягають лінеаризації і лише одержане наближення визначає структуру тензора та пов'язаних з ним інваріантів. В зв'язку з цим постає проблема доцільності нелінійного функціонального подання полів зміщень для потреб наступного деформаційного аналізу на традиційній теоретичній основі. Очевидно, використання нелінійних функціональних моделей полів зміщень наділено логічним змістом лише для їх просторової інтерполяції.

Поданий аналіз став мотивацією пошуку альтернативних шляхів і розроблення методики вирішення проблеми, які б не були обтяжені констатованими недоліками. В зв'язку з цим у статті [Тадєєв та ін., 2013] обґрунтовано доцільність вирішення загальної проблеми методами проективно-диференціальної геометрії, а шляхи її розв'язання на такій основі подано у статті [Тадєєв, 2013*в*]. Ґрунтуючись на теорії відображення поверхонь, одержано розв'язки задачі оцінювання горизонтальних деформацій земної поверхні, віднесених до площини [Тадєєв, 2013*а*], геосфери [Тадєєв, 2013*б*] та земного еліпсоїда обертання [Тадєєв, 2015]. Якщо порівняти одержані розв'язки з подібними їм, які вже застосовуються в дослідницькій практиці (навіть наведені у поданому аналізі), то постановочно між ними відмінностей не існує. Адже, дотримуючись термінології [Grafarend, Voosoghi, 2003], вони є засобом "внутрішнього моделювання" горизонтальних деформацій земної поверхні на відповідно параметризованих двовимірних модельних поверхнях. Але якщо взяти до уваги, що розв'язки на основі теорії відображення поверхонь не обмежені лінійною функціональною моделлю, то із зрозумілих вже причин останні мають очевидні переваги.

Мета

Беручи за основу методи проективно-диференціальної геометрії, узагальнимо одержані вже розв'язки завдання оцінювання горизонтальних (двовимірних) деформацій земної поверхні на випадок просторових (тривимірних). Розв'язок завдання повинен бути адаптований до прямого використання даних у геоцентричній просторовій системі координат, а параметри деформації віднесені до топографічної поверхні Землі з належною просторовою орієнтацією.

Методика

По суті, поставлене завдання – це "зовнішнє моделювання" [Grafarend, Voosoghi, 2003] просторових деформацій топографічної поверхні Землі у тривимірному евклідовому просторі. Зауважимо, що загалом методи проективно-диференціальної геометрії дають змогу описувати відображення будь-яким чином параметризованих двовимірних криволінійних поверхонь у тривимірному просторі. Але топографічна поверхня є таким їх різновидом, що не підлягає параметризації загальноприйнятими у геодезії способами.

Насамперед визначимо зміст деяких базових положень і термінів проективно-диференціальної (метричної) геометрії [Каган, 1947; Норден, 1956; Фиников, 1937], які прямо стосуються розв'язання поставленого завдання. Розкриємо їх відносно відповідних загальноприйнятих формулювань деформаційного аналізу.

Загальна теорія розглядає завдання у триортогональній системі співфокусних поверхонь довільної кривини. Геоцентрична просторова система (x, y, z), в якій, як вхідні геодезичні дані, задано координати GNSS-станцій, є частковим випадком системи ортогональних декартових координат у тривимірному евклідовому просторі E_3 з правосторонньою орієнтацією і координатними поверхнями нульової кривини – площинами xOy, yOz, xOz. З цієї точки зору розв'язання поставленого завдання можна вважати тривіальним відносно загального.

Відображення (або перетворення) простору – процес, який полягає в тому, що кожній точці M простору ставиться у відповідність деяка точка M'. M' є відображенням (або проекцією) M. Відображення однозначне (або взаємно однозначне), якщо точці M відповідає одна і тільки одна точка M'. Сукупність точок M_i ($i = \overrightarrow{1,n}$) деякої частини чи навіть усього простору, які підлягають однозначному відображенню (або перетворенню), утворюють відображувану область Δ (або область перетворення). Сукупність точок M_i', які відповідають точкам M_i, утворюють область відображення Δ' (або перетворену область). Якщо у тривимірному евклідовому просторі встановлено систему геоцентричних координат (x, y, z) і область Δ замкнена та неперервна, то її цілком визначають (або окреслюють) точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Якщо внаслідок тих чи інших однозначних перетворень простору Δ відобразилась на Δ' і остання зберегла властивості замкненої неперервної області, то її цілком визначають точки $M_i'(x_i', y_i', z_i')$, а відображення Δ на Δ' завжди можна виразити аналітично рівняннями

$$\left.\begin{aligned} x' &= u(x, y, z) \\ y' &= v(x, y, z) \\ z' &= w(x, y, z) \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Згідно загальної теорії відображень, у поданій постановці завдання функції u, v, w, як базові функції однозначного відображення, повинні бути відповідно однозначними і неперервними, а отже диференційованими (з частинними похідними до другого порядку включно). Ці вимоги виражають властивість гомеоморфізму відображення: гомеоморфне відображення є взаємно однозначним і взаємно неперервним. Для вирішення поставленого завдання принципово важливо, що властивість гомеоморфізму не обмежує клас базових функцій (1), а лише накладає на них зазначені вимоги. Однак з точки зору адаптації такої властивості до встановлення функцій, які реалізовують відображення, і вироблення наступного оптимального математичного розв'язання задачі виникають певні проблеми.

Враховуючи дискретну структуру геодезичних даних, єдиним доступним засобом встановлення функцій є емпіричний. Він передбачає апроксимацію невідомих функцій за відомим дискретним розподілом. Завдання виведення емпіричних формул, які відповідають апроксимуючим функціям, не має однозначного строгого розв'язку, чим порушуються умови гомеоморфізму відображення. Тому вирішення завдання потрібно вмотивовувати з точки зору коректності його постановки. Вибір аналітичної форми базових функцій може бути обґрунтований або змістом поставленого завдання за апріорною інформацією про характер перетворення, або формально з математичної точки зору за критеріями точності апроксимації. Остання мотивація видається більш перспективною у зв'язку з можливістю оцінювання ступеню наближення кінцевого розв'язку до строгого з огляду на умови гомеоморфізму. При опрацюванні геодезичних даних для вирішення такого роду завдань здебільшого використовують метод найменших квадратів. Він здатний забезпечити як визначення самих емпіричних формул, так і оцінювання їх точності. Втім, такого роду проблема має місце і при традиційному вирішенні завдання на стадії побудови функціональних моделей полів зміщень.

Властивість гомеоморфізму допускає описування області перетворення простору метричними формами. Як лінійні елементи міри, вони описують не тільки власне проекцію (відображення), а й внутрішню геометрію перетворення простору, яка зумовлена зміною метричних властивостей. Вирішення завдання можна досягти за гіпотези, що зміна метричних властивостей простору має геофізичне походження і спричинена його деформацією. Тоді геометричні параметри гомеоморфного відображення Δ на Δ', які описують такі зміни і передають спотворення проекції, це і є, по суті, характеристики деформації відображуваної області Δ. Висунута гіпотеза є основоположною з погляду на перспективи використання теорії відображень для оцінювання тривимірних деформаційних полів Землі.

Метричну форму відображуваної області Δ описує лінійний елемент ds, який в диференціалах координат виражає співвідношення

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 . \tag{2}$$

На рис. 1 ds показано у системі тріедра (x, y, z) з правосторонньою орієнтацією. Напрям елемента ds визначають полярні геоцентричні координати

$$\lambda = arctg\frac{dy}{dx},$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{dz}{dy}\sin\lambda\right) = arctg\left(\frac{dz}{dx}\cos\lambda\right)$$

або в проекціях ds_{yz}, ds_{xz} на координатні площини yOz, xOz (λ лежить в площині xOy)

$$\varphi_{yz} = arctg\frac{dz}{dy}, \qquad \varphi_{xz} = arctg\frac{dz}{dx}.$$

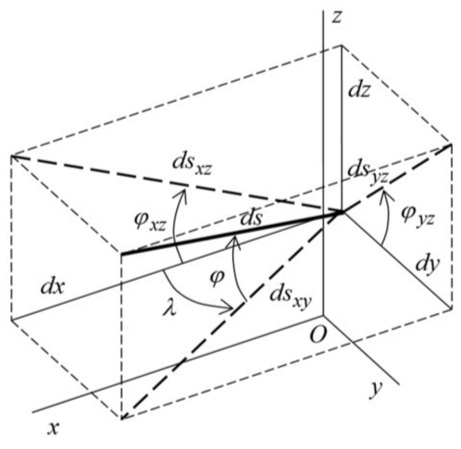

Рис. 1. Лінійний елемент ds в тріедрі з правосторонньою орієнтацією

Fig. 1. The linear element ds in the right orientation trihedron

Для відображення ds' лінійного елемента ds, яке відповідає перетвореній області Δ', маємо

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 . \qquad (3)$$

Допустимо, з тих чи інших міркувань встановлено емпіричні формули, які відповідають базовим функціям (1). Їх повні диференціали

$$dx' = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$
$$dy' = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz,$$
$$dz' = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

дають змогу виразити квадратичну форму (3) через диференціали координат області Δ:

$$ds'^2 = e_{xx}dx^2 + e_{yy}dy^2 + e_{zz}dz^2 + $$
$$+ 2e_{xy}dxdy + 2e_{yz}dydz + 2e_{xz}dxdz . \qquad (4)$$

Позначення коефіцієнтів метричної форми (4) розкриваються наступним чином:

$$e_{xx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2;$$
$$e_{yy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2;$$
$$e_{zz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2;$$
$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y};$$
$$e_{yz} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z};$$
$$e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ними формується симетрична матриця

$$\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Квадратична форма (4) називається основною метричною формою, а матриця (5) – основним метричним тензором перетворення простору. Тензор (5) цілком визначають функції, які виражають конкретну реалізацію відображення (1): компоненти тензора – це частинні похідні базових функцій відображення.

За гіпотези, що зміна метричних властивостей простору спричинена деформацією, тензор (5) слід визнати тензором деформації простору. Як основний носій інформації про такі зміни, тензор здатний передавати їх ознаки тими чи іншими числовими характеристиками різного геометричного змісту – параметрами деформації простору в загальноприйнятому тлумаченні деформаційного аналізу. Тензор (5), як і тензор деформації в механіці суцільного середовища, має диференціальне походження. Тому слід очікувати тотожності як змісту, так і числового вираження параметрів деформації на засадах обох фундаментальних теорій: теорії відображення простору і теорії деформації суцільного середовища.

Результати

Виразимо лінійні спотворення відображення (1) – лінійні деформації області простору Δ при її перетворенні у відповідну область простору Δ'. Така ознака деформування простору виражається коефіцієнтом спотворення у визначеному напрямі. Його ще називають масштабом відображення або модулем розширення. Для цього використовуємо метричні форми, які відповідають Δ та Δ', і тензор деформації (5).

Спотворення у довільному напрямі (λ, φ) виражає коефіцієнт $\mu = \dfrac{ds'}{ds}$. Беручи до уваги квадратичні форми (2) та (4) і співвідношення $dx = ds\cos\varphi\cos\lambda$, $dy = ds\cos\varphi\sin\lambda$, $dz = ds\sin\varphi$, одержуємо:

$$\mu^2 = e_{xx}\cos^2\varphi\cos^2\lambda + e_{yy}\cos^2\varphi\sin^2\lambda +$$
$$+ e_{zz}\sin^2\varphi + e_{xy}\cos^2\varphi\sin 2\lambda +$$
$$+ e_{yz}\sin 2\varphi\sin\lambda + e_{xz}\sin 2\varphi\cos\lambda . \qquad (6)$$

Отже, розширення області простору в напрямі (λ, φ) цілком визначає тензор (5).

Якщо задатись значеннями (λ, φ), які відповідають напрямам осей системи координат (x, y, z), з формули (6) слідує:

$$\mu_x^2 = e_{xx}; \qquad (7)$$

$$\mu_y^2 = e_{yy}; \qquad (8)$$

$$\mu_z^2 = e_{zz}. \qquad (9)$$

Отже, розширення області простору в напрямах осей координат поодинці визначають діагональні компоненти тензора деформації.

Особливе значення для деформаційного аналізу мають показники екстремальних розширень. Відповідні їм коефіцієнти μ_{ext} і головні напрями $(\lambda_\circ, \varphi_\circ)$ та $(\lambda_\circ + 90^\circ, \varphi_\circ + 90^\circ)$ дає розв'язок системи рівнянь

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(\mu^2)}{d\lambda} = 0 \\ \frac{d(\mu^2)}{d\varphi} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

З диференціювання (6) одержуємо систему нелінійних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} &2tg\varphi_\circ\left(e_{yz}\cos\lambda_\circ - e_{xz}\sin\lambda_\circ\right) + \\ &\quad + \left(e_{yy} - e_{xx}\right)\sin 2\lambda_\circ + 2e_{xy}\cos 2\lambda_\circ = 0 \\ &tg2\varphi_\circ\left(e_{zz} - e_{xx}\cos^2\lambda_\circ - e_{yy}\sin^2\lambda_\circ - \right. \\ &\left. - e_{xy}\sin 2\lambda_\circ\right) + 2\left(e_{yz}\sin\lambda_\circ + e_{xz}\cos\lambda_\circ\right) = 0 \end{aligned}\right\}. \quad (10)$$

Її розв'язання визначає головні напрями $(\lambda_\circ, \varphi_\circ)$ і відповідні показники екстремальних розширень.

Розв'язання рівнянь (10) відносно координатних площин системи (x, y, z) дає наступні результати.

В координатній площині xOy значення $\varphi = const = 0^\circ$. За такої умови $tg\varphi = 0$ і з першого рівняння системи (10) для головного напряму $\lambda_\circ$ одержуємо рівність

$$tg2\lambda_\circ = \frac{2e_{xy}}{e_{xx} - e_{yy}}. \quad (11)$$

Максимальне розширення області простору в цьому напрямі виражає коефіцієнт спотворення

$$\mu^2_{xy_{\max}} = \frac{1}{2}\left(e_{xx} + e_{yy} + \sqrt{\left(e_{xx} - e_{yy}\right)^2 + 4e^2_{xy}}\right). \quad (12)$$

Формулу (12) одержано на основі (6) з урахуванням результатів нескладних перетворень формули (11). Мінімальне розширення (стиснення) виражає коефіцієнт спотворення

$$\mu^2_{xy_{\min}} = \frac{1}{2}\left(e_{xx} + e_{yy} - \sqrt{\left(e_{xx} - e_{yy}\right)^2 + 4e^2_{xy}}\right) \quad (13)$$

в напрямі $\lambda_\circ + 90^\circ$. Формулу (13) одержано на такій же основі, як і (12). Напрями екстремальних розширень показано на рис. 2.а.

Екстремальні розширення області простору у відповідних головних напрямах координатних площин yOz і xOz можна одержати з розв'язання другого рівняння системи (10)

$$tg2\varphi_\circ = \frac{2e_{yz}\sin\lambda_\circ + 2e_{xz}\cos\lambda_\circ}{e_{xx}\cos^2\lambda_\circ + e_{yy}\sin^2\lambda_\circ + e_{xy}\sin 2\lambda_\circ - e_{zz}}. \quad (14)$$

В координатній площині yOz при значенні $\lambda = const = 90^\circ$ з рівняння (14) слідує:

$$tg2\varphi_{yz_\circ} = \frac{2e_{yz}}{e_{yy} - e_{zz}}. \quad (15)$$

У напрямі $\varphi_{yz_\circ}$ (див. рис. 2.б) максимальне розширення виражає коефіцієнт

$$\mu^2_{yz_{\max}} = \frac{1}{2}\left(e_{yy} + e_{zz} + \sqrt{\left(e_{yy} - e_{zz}\right)^2 + 4e^2_{yz}}\right). \quad (16)$$

Для напряму $\varphi_{yz_\circ} + 90^\circ$ одержуємо

$$\mu^2_{yz_{\min}} = \frac{1}{2}\left(e_{yy} + e_{zz} - \sqrt{\left(e_{yy} - e_{zz}\right)^2 + 4e^2_{yz}}\right). \quad (17)$$

В координатній площині xOz значення $\lambda = const = 0^\circ$. Тоді розв'язок

$$tg2\varphi_{xz_\circ} = \frac{2e_{xz}}{e_{xx} - e_{zz}} \quad (18)$$

рівняння (14) задає два головні напрями $\varphi_{xz_\circ}$ і $\varphi_{xz_\circ} + 90^\circ$ (див. рис. 2.в) з екстремальними розширеннями, які виражають коефіцієнти

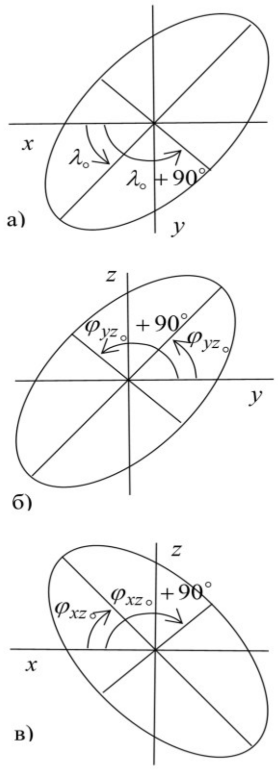

Рис. 2. Напрями екстремальних розширень в координатних площинах системи (x, y, z)
Fig. 2. Directions of extreme elongations in coordinate planes of the (x, y, z) system

$$\mu_{xz\max}^2 = \frac{1}{2}\left(e_{xx} + e_{zz} + \sqrt{\left(e_{xx} - e_{zz}\right)^2 + 4e_{xz}^2}\right), \quad (19)$$

$$\mu_{xz\min}^2 = \frac{1}{2}\left(e_{xx} + e_{zz} - \sqrt{\left(e_{xx} - e_{zz}\right)^2 + 4e_{xz}^2}\right). \quad (20)$$

Формули розрахунку розширень області Δ, віднесені до координатних площин, тотожні аналогічним, які одержано на такій же основі для оцінювання горизонтальних деформацій [Тадєєв, 2013*a*]. Якщо припустити, що базові функції відображення лінійні, то одержані формули виражають розширення, як це прийнято за традиційного підходу до деформаційного аналізу. Головні значення деформації тоді називають зсувними. Якщо слідувати усталеним традиціям, то одержані у відношенні до координатних площин результати слід трактувати таким чином.

У площині xOy

$$\mu_{xy\max}^2 = \rho_{xy} + \frac{\gamma_{xy_m}}{2}; \quad \mu_{xy\min}^2 = \rho_{xy} - \frac{\gamma_{xy_m}}{2}.$$

Тут позначено

$$\rho_{xy} = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2}; \quad \gamma_{xy_m} = \sqrt{\gamma_{xy_1}^2 + \gamma_{xy_2}^2}; \quad \gamma_{xy_1} = e_{xx} - e_{yy}; \quad \gamma_{xy_2} = 2e_{xy}. \quad (21)$$

Величини $\mu_{xy\max}^2$, $\mu_{xy\min}^2$ і ρ_{xy} прийнято називати відповідно максимальним, мінімальним і середнім розширенням. γ_{xy_m} – максимальний зсув у площині xOy, а γ_{xy_1} і γ_{xy_2} – його компоненти. Ці величини у відношенні до координатних площин yOz і xOz набувають наступного вираження:

$$\mu_{yz\max}^2 = \rho_{yz} + \frac{\gamma_{yz_m}}{2}; \quad \mu_{yz\min}^2 = \rho_{yz} - \frac{\gamma_{yz_m}}{2};$$

$$\rho_{yz} = \frac{e_{yy} + e_{zz}}{2}; \quad \gamma_{yz_m} = \sqrt{\gamma_{yz_1}^2 + \gamma_{yz_2}^2}; \quad \gamma_{yz_1} = e_{yy} - e_{zz}; \quad \gamma_{yz_2} = 2e_{yz}; \quad (22)$$

$$\mu_{xz\max}^2 = \rho_{xz} + \frac{\gamma_{xz_m}}{2}; \quad \mu_{xz\min}^2 = \rho_{xz} - \frac{\gamma_{xz_m}}{2};$$

$$\rho_{xz} = \frac{e_{xx} + e_{zz}}{2}; \quad \gamma_{xz_m} = \sqrt{\gamma_{xz1}^2 + \gamma_{xz2}^2}; \quad \gamma_{xz1} = e_{xx} - e_{zz}; \quad \gamma_{xz2} = 2e_{xz}. \quad (23)$$

Просторове орієнтування показників екстремальних розширень області Δ задає тріада ортогональних напрямів $(\lambda_\circ + 90^\circ, \varphi_\circ, \varphi_\circ + 90^\circ)$.

Напрям $\lambda_\circ + 90^\circ$ і відповідне розширення виражають формули (11) і (13). Залишаючи фіксованими головні напрями у площині xOy, виразимо інші невідомі. $\varphi_\circ$ розкривається формулою (14) або, після її перетворень, безпосередньо за компонентами тензора (5) і складовими зсуву в координатних площинах:

$$tg 2\varphi_\circ = 2\frac{2e_{yz}\sqrt{\dfrac{\gamma_{xy_m} - \gamma_{xy_1}}{2\gamma_{xy_m}}} + 2e_{xz}\sqrt{\dfrac{\gamma_{xy_m} + \gamma_{xy_1}}{2\gamma_{xy_m}}}}{e_{xx} + e_{yy} - 2e_{zz} + \gamma_{xy_m}}. \quad (24)$$

Напряму $\varphi_\circ$ відповідає максимальне розширення області простору, яке виражає коефіцієнт $\mu_{\max}$, а ортогональному до нього $\varphi_\circ + 90^\circ$ – мінімальне розширення з відповідним коефіцієнтом $\mu_{\min}$:

$$\mu_{\max}^2 = \frac{1}{4}\left(e_{xx} + e_{yy} + 2e_{zz} + \gamma_{xy_m} + \sqrt{\left(e_{xx} + e_{yy} - 2e_{zz} + \gamma_{xy_m}\right)^2 + 4\left(2e_{yz}\sqrt{\frac{\gamma_{xy_m} - \gamma_{xy_1}}{2\gamma_{xy_m}}} + 2e_{xz}\sqrt{\frac{\gamma_{xy_m} + \gamma_{xy_1}}{2\gamma_{xy_m}}}\right)^2}\right); \quad (25)$$

$$\mu_{\min}^2 = \frac{1}{4}\left(e_{xx} + e_{yy} + 2e_{zz} + \gamma_{xy_m} - \sqrt{\left(e_{xx} + e_{yy} - 2e_{zz} + \gamma_{xy_m}\right)^2 + 4\left(2e_{yz}\sqrt{\frac{\gamma_{xy_m} - \gamma_{xy_1}}{2\gamma_{xy_m}}} + 2e_{xz}\sqrt{\frac{\gamma_{xy_m} + \gamma_{xy_1}}{2\gamma_{xy_m}}}\right)^2}\right). \quad (26)$$

Беручи до уваги позначення (21) – (23), вираження (24) – (26) можна подати в будь-яких інших зручних формах, у тому числі й більш компактних, і на їх основі відповідні параметри належно інтерпретувати.

Отже, тріаді напрямів $(\lambda_\circ + 90^\circ, \varphi_\circ, \varphi_\circ + 90^\circ)$ відповідають коефіцієнти $\left(\mu_{xy\min}^2, \mu_{\max}^2, \mu_{\min}^2\right)$. В сукупності останні є екстремальними показниками лінійних деформацій області простору Δ при її перетворенні у область Δ', якщо таке перетворення виражене функціями (1).

Наукова новизна і практична значущість

Обґрунтовано, що при дослідженнях деформаційних полів Землі методи проективно-диференціальної геометрії мають більші потенційні можливості порівняно з методами лінійної механіки суцільного середовища і забезпечують узагальнені розв’язки. Гомеоморфна функціональна модель, як основа формування тензора, дає змогу виражати деформації будь-якого характеру. Одержано розрахункові формули для вираження головних лінійних деформацій. Результати придатні для оцінювання тривимірних деформаційних полів будь-яких масштабів. Параметри деформації віднесені безпосередньо до топографічної поверхні Землі. Достатнє покриття Землі GNSS-станціями і репрезентативні дані спостережень, що визначає повноту побудови функціональної моделі, разом з одержаними результатами здатні забезпечити оцінки та інтерпретацію реальних деформацій, а не віднесених до традиційних модельних референцних поверхонь.

Висновки і перспективи подальших досліджень

На даному етапі досліджень обґрунтовано доцільність використання методів проективно-диференціальної геометрії для моделювання просторових деформацій топографічної поверхні Землі у тривимірній геоцентричній системі координат. Сформульовано постановку задачі. Одержано аналітичні вираження головних лінійних деформацій у довільному заданому напрямі, вздовж напрямів координатних осей, в проекціях на координатні площини, а також для тріади їх екстремальних значень з відповідною просторовою орієнтацією. Формування тензора деформації, який визначає ці параметри, не обтяжене умовою лінеаризації функціональної моделі зміщень пунктів. Одержані результати дають змогу оцінювати реальні, а не змодельовані лінійні, деформації топографічної поверхні, наскільки їх можливо подати у рамках гомеоморфної функціональної моделі.

На топографічну поверхню Землі, як замкнену неперервну область простору, яка є об'єктом досліджень методами проективно-диференціальної геометрії, не накладається жодних обмежень щодо її розмірів та геометричних форм. З практичної точки зору це означає наступне. По-перше, відпадає потреба поділу поверхні на скінченні елементи. По-друге, як наслідок, не існує й обмежень на масштаби відповідних поверхні деформаційних полів: дослідженням на такій теоретичній основі рівною мірою можуть підлягати геодинамічні процеси як глобального, так і регіонального чи локального масштабів. Ймовірно, для досягнення ефективних результатів інтерпретації деформаційних полів регіонального та локального масштабів буде доцільним здійснювати перетворення вхідних даних з просторової геоцентричної в умовну тривимірну топоцентричну систему координат.

Показники головних лінійних деформацій області простору, для яких одержано різні аналітичні формулювання, об'єднує між собою подібний геометричний зміст і походження – вони є наслідком співвідношення лінійних елементів, як метричних форм області, до та після її деформації. З цієї причини відносимо їх до однієї групи з відповідним найменуванням – головні лінійні деформації. Якщо дотримуватись усталених традицій деформаційного аналізу, нарівні з ними для інтерпретації полів користуються ще двома групами параметрів – дилатацією, як показником відносних змін об'єму чи площі, та показниками кутових деформацій. За останніми найчастіше виражають, згідно загальноприйнятої термінології, "обертання області як абсолютно твердого тіла". Вираження параметрів деформації топографічної поверхні, які віднесені до цих двох груп, використовуючи методи проективно-диференціальної геометрії, – предмет подальших досліджень.

Література

Есиков Н. П. Тектонофизические аспекты анализа современных движений земной поверхности / Н.П. Есиков. - Новосибирск: Наука, 1979. - 173с.

Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1,2 / В. Ф. Каган. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1947-1948. – 919с.

Норден А. П. Теория поверхностей / А. П. Орден. - М.: ГИТТЛ, 1956. - 261с.

Тадєєва О.О. Достовірність результатів опрацювання геодезичних даних методом скінченних елементів / О. О. Тадєєва, О. А. Тадєєв, П. Г. Черняга // Геодинаміка. – 2012. – № 2(13). – С.28–33.

Тадєєв О. Оцінювання деформацій земної поверхні за даними в геодезичних криволінійних системах координат / О. Тадєєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2015. – Вип. I (29). – С.48–52.

Тадєєв О. А. Оцінювання деформацій земної поверхні з позицій теорії квазіконформних відображень / О. А. Тадєєв // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2013*а*. – Вип. 78. – С.140–145.

Тадєєв О. Оцінювання деформацій земної поверхні, редукованої на геосферу / О. Тадєєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2013*б*. – Вип. II (26). – С.46–52.

Тадєєв О. А. Проблема оцінки деформованого стану земної поверхні за геодезичними даними / О. А. Тадєєв, О. О. Тадєєва, П. Г. Черняга // Геодинаміка. – 2013. – № 1(14). – С.5–10.

Тадєєв О. А. Шляхи вирішення задачі оцінювання деформацій земної поверхні за геодезичними даними / О.А. Тадєєв // Вісник геодезії та картографії. – 2013*в*. – № 5(86). – С.21–26.

Фиников С. П. Проективно-дифференциальная геометрия / С. П. Фиников. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 265с.

Altiner Y. Analytical surface deformation theory for detection of the Earths crust movements / Y. Altiner. – Berlin: Springer, 1999. – 110 p.
Altiner Y. Present-day tectonics in and around the Adria plate inferred from GPS measurements / Y. Altiner, Z. Bacic, T. Basic, A. Coticchia, M. Medved, M. Mulic // Dilek Y., Pavlides S. (Eds.), Postcollisional tectonics and magnetism in the Mediterranean region and Asia: Geological Society of America Special Paper 409, 2006. – pp. 43-55.
Brunner F. K. On the analysis of geodetic networks for the determination of the incremental strain tensor / F.K. Brunner // Survey Review. – 1979. – Vol. XXV, 192. – pp. 56-67.
Grafarend E. W. The transition from three-dimensional embedding to two-dimensional Euler-Lagrange deformation tensor of the second kind: variation of curvature measures / E.W. Grafarend // Pure and Applied Geophysics. – 2012. – Vol. 169. – pp. 1457-1462.
Grafarend E. W. Intrinsic deformation analysis of the Earths surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements. Case studies: present-day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets) / E.W. Grafarend, B. Voosoghi // Journal of Geodesy. – 2003. – Vol. 77. – pp. 303–326.
Hammond W. C. Contemporary tectonic deformation of the Basin and Range province, western United States: 10 years of observation with the Global Positioning System / W.C. Hammond, W. Thatcher // Journal of Geophysical Research. – 2004. – Vol. 109(B8), B08403. – 21 p.
Hammond W. C. Crustal deformation across the Sierra Nevada, northern Walker Lane, Basin and Range transition, western United States measured with GPS, 2000-2004 / W.C. Hammond, W. Thatcher // Journal of Geophysical Research. – 2007. –Vol. 112(B5), B05411. – 26 p.
Hossainali M. Comprehensive approach to the analysis of the 3D kinematics deformation with application to the Kenai Peninsula / M. Hossainali, M. Becker, E. Groten // Journal of Geodetic Science. – 2011a. – Vol. 1. Iss.1. - pp. 59–73.
Hossainali M. Procrustean statistical inference of deformation / M. Hossainali, M. Becker, E. Groten // Journal of Geodetic Science. – 2011b. – Vol. 1. Iss.2. - pp. 170–180.
International Association of Geodesy - http://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/handbook_2012/333_Commission_3.pdf
International Federation of Surveyors - http://www.fig.net/organisation/comm/index.asp
Joint International Symposium on Deformation Monitoring - http://jisdm2016.org/
Kiamehr R. Analysis of surface deformation patterns using 3D finite element method: A case study in the Skane area, Sweden / R. Kiamehr, L.E. Sjoberg // Journal of Geodynamics. – 2005. – Vol. 39. – pp. 403–412.
Kreemer C. Geodetic constraints on contemporary deformation in the northern Walker Lane: 2. Velocity and strain rate tensor analysis / C. Kreemer, G. Blewitt, W.C. Hammond // Oldow J.S., Cashman P.H. (Eds.), Late Cenozoic structure and evolution of the Great Basin – Sierra Nevada transition: Geological Society of America Special Paper 447, 2009. – pp. 17–31.
Love A. E. A treatise on the mathematical theory of elasticity / A.E. Love. – Dover, Minneola, N. Y., 1944. – 380 p.
Moghtased-Azar K. Surface deformation analysis on dense GPS networks based on intrinsic geometry: deterministic and stochastic aspects / K. Moghtased-Azar, E.W. Grafarend // Journal of Geodesy. – 2009. – Vol. 83. – pp. 431–454.
Pietrantonio G. Three-dimensional strain tensor estimation by GPS observations: methodological aspects and geophysical applications / G. Pietrantonio, F. Riguzzi // Journal of Geodynamics. – 2004. – Vol. 38. – pp. 1–18.
Reilly W. I. Continuum models in earth deformation analysis / W.I. Reilly // Pelzer H., Niemeier W. (Eds.), Determination of heights and height changes. – Bonn: Dummler, 1987. – pp. 557-569.
Savage J.C. Strain accumulation and rotation in the Eastern California Shear Zone / J.C. Savage, W. Gan, J.L. Svarc // Journal of Geophysical Research. – 2001. –Vol. 106(B10). – pp. 21995–22007.
Savage J. C. Interseismic strain and rotation rates in the northeast Mojave domain, eastern California / J.C. Savage, J.L. Svarc, W.H. Prescott // Journal of Geophysical Research. – 2004. – Vol. 109(B2), B02406. – 13 p.
Voosoghi B. Intrinsic deformation analysis of the Earths surface based on 3-dimensional displacement fields derived from space geodetic measurements / B. Voosoghi // PhD thesis, Institute of Geodesy, University of Stuttgart, Germany, 2000. – 110 p. - http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2000/722/pdf/voosoghi.pdf
Xu P. L. Statistics and geometry of the eigenspectra of three-dimensional decond-rank symmetric random tensor / P.L. Xu, E.W. Grafarend // Geophysical Journal International. – 1996. – Vol. 127(3). – pp. 744–756.

Надійшла 16.08.2016 р.