УДК 528.21;550.312;521.21;52.17

М. М. ФИС, А. Р. СОГОР, М. І. ЮРКІВ*

Кафедра картографії та геопросторового моделювання, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, 79013, *ел.пошта Mariana.I.Yurkiv@lpnu.ua

ДО ВИЗНАЧЕННЯ ЕКВІПОТЕНЦІАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ПЛАНЕТ З ВИКОРИСТАННЯМ БІОРТОГОНАЛЬНИХ РОЗКЛАДІВ

Мета. За відомим фіксованим потенціалом Землі, поданим за допомогою біортогонального розкладу, як одного з варіантів його представлення, знайти поверхню геоїда, яка описує реальну фігуру планети. Зовнішнє гравітаційне поле описується, як правило, рядами за кульовими функціями. Оскільки геоїд визначають з їх використанням, тому виникає питання ідентичності визначення фігури, тим паче, що частина її точок не належить області збіжності. **Методика і результати роботи**. У роботі розглянуто представлення потенціалу всюди збіжними рядами, що дає можливість знаходити геоїд без уточнення розміщення точок на його поверхні, хоча обчислення висот геоїда здійснюється за різними співвідношеннями. За відомою функцією розподілу мас надр Землі, представленою многочленом другого степеня, визначено внутрішній та зовнішній потенціал еліптичної планети, за яким знайдено еквіпотенціальні поверхні. Проаналізовано обчислені значення за цими формулами та степінь їх співпадання. Визначені двома способами поверхні рівня не співпадають між собою, бо різниця в значеннях радіус-векторів досягає десятків метрів. Тому застосувати біортогональні розклади вищих степенів під час побудови еквіпотенціальних поверхонь на основі інформації про зовнішнє гравітаційне поле необхідно з урахуванням особливостей розкладу. **Наукова новизна.** Запропонований метод визначення фігури Землі з використанням біортогональних розкладів функції розподілу мас. Таке представлення характеризується збіжністю для розглянутих рядів та дає можливість будувати цифрові моделі геоїда (об’ємні, або у вигляді карт ізоліній). **Практична значущість.** Результати числових експериментів, наведених у статті, дали змогу зробити висновок про можливість визначення еквіпотенціальних поверхонь, які адекватно описують фізичну поверхню планети, не тільки другого, а і вищих порядків з використанням біортогональних розкладів лише за додаткових досліджень. Обчислення висот геоїда з високою точністю відкриває шлях до дослідження багатьох регіональних та локальних геодинамічних явищ, наприклад, руху тектонічних плит, а високоточне нівелювання за допомогою GPS-технологій дає змогу розв’язувати низку геодезичних задач.

Ключові слова: потенціал, кульові та сферичні функції, поверхні рівня, збіжність рядів, еліпсоїд.

Вступ

Зовнішнє гравітаційне поле планет достатньо детально подається рядами за кульовими функціями [Pavlis, 2008; Yung, 2001; Konopliv, 1999; Konopliv, 2001]. Дослідженню збіжності рядів в довільній області за кульовими функціями присвячено ряд робіт [Kraup, 1969; Марченко, 1983; Marchenko, 1998; Пеллинен, 1978; Морітц, 1983]. Поряд з тим, є актуальним і практичним дослідження, що стосуються представлення потенціалу за допомогою інших функцій [Мещеряков, 1991; Антонов, 1988; Загребин, 1976; Марченко, 1982; Бальміно, 1975]. Ще одним варіантом іншого підходу є опис тривимірної частини функції розподілу мас з допомогою біортогональних рядів, які в подальшому представляють потенціал (внутрішній та зовнішній) планети. Таке зображення представляється всюди збіжним рядом [Черняга, 2014], тим самим дає можливість визначати більш впевнено поверхню рівня Землі.

Мета

Визначення еквіпотенціальних поверхонь за відомим фіксованим потенціалом (внутрішнім та зовнішнім) встановлює вигляд поверхні відносності (геоїд для Землі). Зовнішнє гравітаційне поле описується, як правило, за допомогою рядів, в основному за кульовими функціями. Тому виникає питання адекватного опису фігури Землі, тим більше, що частина її точок не належить області збіжності.

Методика

Внутрішній та зовнішній потенціал тривимірної частини розподілу мас планети описується виразом:

$$U = f\int_{\tau}\frac{\delta}{r}d\tau = \sum_{m+n+k=0}^{N} b_{mnk}U_{mnk}(x_1, x_2, x_3)\,, \tag{1}$$

де

$$\delta(x_1,x_2,x_3)=\sum_{m+n+k=0}^{N} b_{mnk}W_{mnk}(x_1,x_2,x_3), \qquad (2)$$

$$U_{mnk}(x_1,x_2,x_3)=f\int_{\tau}\frac{W_{mnk}(\xi,\eta,\varsigma)}{r(\xi,\eta,\varsigma,x_1,x_2,x_3)}d\tau \qquad (3)$$

.

За відомими коефіцієнтами b_{mnk} та зафіксованим потенціалом U_0 (потенціалом рівня моря) вираз:

$$U_0=\sum_{m+n+k=0}^{N} b_{mnk}U_{mnk}(x_1,x_2,x_3) \qquad (4)$$

визначає поверхню, на якій він постійний (геоїд – для Землі, селеноїд – для Місяця, ароїд – для Марса), і ряд (4) є збіжний. Це є наслідком збіжності в середньому [Фис, 1983], розкладу (2) та рівномірної збіжності (1). Тому основною проблемою в запропонованому підході є визначення коефіцієнтів b_{mnk}, деякі з яких можуть бути визначені за даними про гравітаційне поле планети (Землі), наприклад, стоксовими постійними [Фис, 1997; Фис, 2006]. Дослідження, проведені в роботі [Черняга, 2014], виявили неповноту зображення для деяких напрямків, в зв'язку з чим виникає необхідність додаткових досліджень з урахуванням вигляду лінійних комбінацій U_{mnk}. Проте, для $N\le 2$ коефіцієнти розкладу визначаються однозначно за формулами [Фис, 2008],

$$\begin{aligned}
&b_{000}=\delta_C,\\
&b_{002}=\frac{7}{2}\left[5\left(\frac{-C_{20}}{2H}+C_{20}\right)\delta_C-\gamma^2 b_{000}\right],\\
&b_{200}=\frac{7}{2}\left[5\left(2C_{22}-\frac{C_{20}}{2H}\right)\delta_C-\alpha^2 b_{000}\right],\\
&b_{020}=\frac{7}{2}\left[5\left(-\frac{C_{20}}{2H}-2C_{22}\right)\delta_C-\beta^2 b_{000}\right].\\
&b_{101}=b_{011}=,b_{110}=0,
\end{aligned} \qquad (5)$$

де C_{20}, C_{22} - стоксові постійні, приведені до головних осей інерції.

Для простоти обчислень візьмемо дані, прийняті в GRS – 80 [Moritz, 1979], а саме:
$U_0=62636860.85\,м^2c^{-2}$, $fM=(398600.50\pm 0.05)км^3c^{-2}$,
а стоксові постійні за моделлю гравітаційного поля GEM-10 [Lerch, 1979].

Рівняння поверхні постійного потенціалу в даному випадку таке:

$$\begin{aligned}
u_0=&\,b_{000}U_{000}(x_1,x_2,x_3)+b_{200}U_{200}(x_1,x_2,x_3)+b_{002}U_{002}(x_1,x_2,x_3)+b_{020}U_{020}(x_1,x_2,x_3)+\\
&+b_{110}U_{110}(x_1,x_2,x_3)+b_{101}U_{101}(x_1,x_2,x_3)+b_{011}U_{011}(x_1,x_2,x_3),
\end{aligned} \qquad (6)$$

де $u_0=\dfrac{U_0R}{fM}$.

Розпишемо детально кожен з елементі**в** U_{mnk}, приймаючи фігуру планети за кулю (частковий випадок еліпсоїда) радіусом *R*=6371*км.*

$$U_{000} = -\frac{3fM}{2R}\left(\frac{1}{3}\rho^2 - 1\right),$$
$$U_{200} = -\frac{3fM}{8R^3}\left(\frac{1}{7}\rho^4\left(1+4\sin^2\theta\cos^2\lambda\right) - \frac{2}{5}\rho^2\left(1+2\sin^2\theta\cos^2\lambda\right) + \frac{1}{3}\right),$$
$$U_{020} = -\frac{3fM}{8R^3}\left(\frac{1}{7}\rho^4\left(1+4\sin^2\theta\sin^2\lambda\right) - \frac{2}{5}\rho^2\left(1+2\sin^2\theta\sin^2\lambda\right) + \frac{1}{3}\right),$$
$$U_{002} = -\frac{3fM}{8R^3}\left(\frac{1}{7}\rho^4\left(1+4\cos^2\theta\right) - \frac{2}{5}\rho^2\left(1+2\cos^2\theta)\right) + \frac{1}{3}\right),$$
$$U_{110} = -\frac{3fM}{R^3}\sin^2\theta\sin 2\lambda\left(\frac{1}{7}\rho^4 - \frac{1}{5}\rho^2\right), U_{101} = -\frac{3fM}{R^3}\sin 2\theta\cos\lambda\left(\frac{1}{7}\rho^4 - \frac{1}{5}\rho^2\right),$$
$$U_{011} = -\frac{3fM}{R^3}\sin 2\theta\sin\lambda\left(\frac{1}{7}\rho^4 - \frac{1}{5}\rho^2\right) \tag{7}$$

З рівняння (4) при фіксованих значеннях широти, довготи та позначеннях:

$$a_0 = \frac{3}{56}\Big[b_{200}\left(1+4\sin^2\theta\cos^2\lambda\right) + b_{020}\left(1+4\sin^2\theta\sin^2\lambda\right) + b_{020}\left(1+4\cos^2\theta\right)$$
$$+4b_{110}\sin^2\theta\sin 2\lambda + 4b_{101}\sin 2\theta\cos\lambda + 4b_{011}\sin 2\theta\sin\lambda\ \Big], \tag{8}$$
$$a_1 = -\frac{3}{20}\Big[b_{200}\left(1+2\sin^2\theta\cos^2\lambda\right) + b_{020}\left(1+2\sin^2\theta\sin^2\lambda\right) + b_{002}\left(1+2\cos^2\theta\right)$$
$$+\left(4b_{110}\sin^2\theta\sin 2\lambda + 4b_{101}\sin 2\theta\cos\lambda + 4b_{011}\sin 2\theta\sin\lambda\right)\Big] - \frac{1}{2}, \tag{9}$$
$$a_2 = -\frac{\left(b_{200}+b_{020}+b_{002}\right)}{8} - u_0 + \frac{3}{2}$$

$$U_2 = a_0\rho^4 + a_1\rho^2 + a_2 \tag{10}$$

Обчислюється за формулою:

$$\rho^2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}. \tag{11}$$

Визначення значення радіус-вектора за приведеною вище формулою не дає достовірних результатів. Тому в подальшому визначимо її за допомогою наближених методів, наприклад, методом половинного ділення.

За виведеними формулами здійснимо обчислення та відобразимо їх в таблиці 1

Таблиця 1

Значення відносних радіус-векторів геоїда, знайденого за внутрішнім потенціалом U_2 в метрах

Довгота θ (º)	Широта λ (º)					
	0	30	60	90	120	150
0	6362420.173	6362420.173	6362420.173	6362420.173	6362420.173	6362420.173

30	6362891.463	6362888.739	6362890.093	6362891.459	6362888.737	6362890.095
60	6363833.619	6363825.456	6363829.519	6363833.615	6363825.454	6363829.521
90	6364304.486	6364293.606	6364299.025	6364304.486	6364293.606	6364299.025
120	6363833.615	6363825.454	6363829.521	6363833.619	6363825.456	6363829.519
150	6362891.459	6362888.737	6362890.095	6362891.463	6362888.739	6362890.093

Аналогічно виведемо співвідношення для зовнішнього потенціалу *V*, елементи якого представляються так:

$$\begin{aligned}
&U_{000}=\frac{fM}{r},U_{200}=-\frac{fM}{35r^3}\left(1-3\sin^2\theta\cos^2\lambda\right),\\
&U_{020}=-\frac{fM}{35r^3}\left(1-3\sin^2\theta\sin^2\lambda\right),U_{002}=-\frac{fM}{35r^3}\left(1-3\cos^2\theta\right),\\
&U_{110}=\frac{fM}{35r^3}\sin^2\theta\cos2\lambda,U_{101}=\frac{fM}{35r^3}\sin2\theta\cos\lambda,\\
&U_{011}=\frac{fM}{35r^3}\sin2\theta\sin\lambda.
\end{aligned} \tag{12}$$

Рівняння знаходження радіус - вектора ρ по заданих величинах наступне:

$$V_2=-\frac{1}{35\rho^3}\Big[\left(1-3\sin^2\theta\cos^2\lambda\right)b_{2000}+\left(1-3\sin^2\theta\sin^2\lambda\right)b_{020}+\left(1-3\cos^2\theta\right)b_{002}$$

$$-6b_{110}\sin^2\theta\cos2\lambda-6b_{101}\sin2\theta\cos\lambda-6b_{011}\sin2\theta\sin\lambda\Big]+\frac{1}{\rho}. \tag{13}$$

Обчислені за формулами (10) та (13) значення U_2, V_2 відповідно, на поверхні кулі (R=6371 км.) співпадають між собою.

Аналогічно попередньому, визначаємо значення радіус-вектора наближеними методами, приведемо їх у вигляді таблиці 2.

Таблиця 2

Значення відносних радіус-векторів геоїда, знайденого за зовнішнім потенціалом V_2

Довгота θ (º)	**Широта λ (º)**					
	0	**30**	**60**	**90**	**120**	**150**
0	6362420.173	6362420.173	6362420.173	6362420.173	6362420.173	6362420.173
30	6362891.464	6362890.087	6362888.742	6362891.464	6362890.087	6362888.742
60	6363833.628	6363829.498	6363825.466	6363833.628	6363829.498	6363825.466
90	6364304.501	6364298.995	6364293.621	6364304.501	6364298.995	6364293.621
120	6363833.628	6363829.498	6363825.466	6363833.628	6363829.498	6363825.466
150	6362891.464	6362890.087	6362888.742	6362891.464	6362890.087	6362888.742

Порівняння двох таблиць показує розбіжність значень радіус-векторів поверхонь, знайдених різними методами, до десятків метрів. Використання біортогональних розкладів вище другої степені можливе тільки з застосуванням гармонічних функцій вигляду (12), оскільки не всі коефіцієнти розкладу b_{vnk} не можуть бути визначені за даними про зовнішнє гравітаційне поле (встановлюються лише їх лінійні комбінації). В зв'язку з цим, при отриманні радіус-векторів поверхонь рівного потенціалу з використанням формул виду (11) необхідні додаткові дослідження.

Наукова новизна

Запропонований метод визначення фігури Землі з використанням біортогональних розкладів функції розподілу мас. Таке представлення характеризується збіжністю для розглянутих рядів, що дає можливість будувати цифрові моделі геоїда (об'ємні, або у вигляді карт ізоліній). Отримані формули дають можливість порівняти числові значення поверхонь геоїда, знайдені за різними виразами.

Практична значущість

Числові експерименти, проведені в статті, дозволили зробити висновок про можливість визначення еквіпотенціальних поверхонь, які адекватно описують фізичну поверхню планети. Обчислення висот геоїда з високою точністю відкриває шлях до дослідження багатьох регіональних та локальних геодинамічних явищ, наприклад, руху тектонічних плит. Високоточне нівелювання з допомогою GPS технологій дозволяє розв'язувати ряд геодезичних задач. Одержання поверхні, близької до фізичної, дає можливість визначати компоненти вектора нормалі до рівневої поверхні Землі.

Висновки

В результаті числових експериментів зробимо наступні висновки:

1. Еквіпотенціальні поверхні, одержані за внутрішнім та зовнішнім гравітаційним полем для густини до другого порядку включно не співпадають між собою (різниця досягає десятка метрів);
2. Потенціали, визначені за допомогою біортогональних розкладів до другого порядку включно (вирази 10 та 13), на поверхні кулі є одинакові;
3. Визначення геоїда за коефіцієнтами, що отримують за допомогою стоксових постійних вищих порядків, буде предметом подальших досліджень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Антонов В. А. Введение в теорию Ньютоновского потенциала / В. А. Антонов, Е. И. Тимошкова, К. В. Холшевников., (Гл. ред. физ. – мат. лит)-1988. – 272 с.

Бальмино Д. Представление потенциала Земли с помощью совокупности точечных масс, находящихся внутри Земли / Д. Бальмино // Использование искусственных спутников для геодезии. М.: Мир, 1975. – С. 175–183.

Загребин Д. В. Введение в теоретическую гравиметрию / Д. В. Загребин. Ленингр. Отд: Изд-во Наука,1976. – 292 с.

Марченко А. Н. Аппроксимация глобального, регионального и локального гравитационного поля Земли системой потенциалов нецентральных мультиполей. / А. Н. Марченко. // Тр. II Орловской конференции. "Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики". – Киев: Наукова думка, 1982. С. 56– 59.

Марченко А. Н. Гильбертовы пространства функций, гармонических вне сферы Бьерхамера, глобальная функция аномального поля / А. Н. Марченко. – Киев: М.: Наука, 1983. – 22 с. – (Рукопись деп. В УкрНИИНТИ, № 292 Ук-Д83).

Мещеряков Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля / Г. А. Мещеряков//– М.: Наука, 1991. – 216 с. – (Гл. ред. Физ– мат. лит).

Мориц Г. Современная физическая геодезия / Г. Мориц// – М.: Недра, 1983. – 392 с.

Пеллинен Л. П. Высшая геодезия (Теоретическая геодезия) / Л. П. Пеллинен. – Москва: "Недра", 1978. – 264 с.

Фис М. М. Метод знаходження густини розподілу мас планети з урахуванням стоксових сталих до четвертого степеня / М. М. Фис, Р. С. Фоца, А. Р. Согор, В .О. Волос // «Геодинаміка». – Львів. – 2008, № 1(7). – С. 25–34.

Фис М. М. Нетрадиційний метод побудови поверхонь рівня планети (геоїда, селеноїда, ароїда) за її зовнішнім гравітаційним полем / М. М. Фис, Ю. П. Губар, І.Я. Покотило // Збірник наукових праць конференції «Сучасні досягнення геодезичної науки і виробництва в Україні». – Львів. – 1997. – С. 39–42.

Фис М. М. Про один клас неортогональних для еліпсоїда гармонійних функцій / М. М. Фис // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2006, Вип. I (11). – С. 126–130.

Фис М. М. О сходимости в среднем биортогональных рядов внутри эллипсоида. Издательство: ”Вища школа” при Львовском ун-те, Львов, ”Дифференциальные уравнения и их приложения”, 1983, вып.172, 2 с

Черняга П. Г. Порівняння одного класу гармонічних та кульових функцій при представленні потенціалу планети / П. Г. Черняга, М.М. Фис, Ю. І. Голубінка, М. І. Юрків // Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК «Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва». – Львів. – 2014, Вип. II (28). – С. 19-23.

Konopliv A., Banerdt W., Sjogren W. Venus gravity: 180 th degree and order model. Icarus, 1999, no. 139, pp. 3–18.

Konopliv A., Asmar S., Yuang D. Resent gravity models as a result of the Lunar Prospector mission. Icarus, 2001, no. 150, pp. 1–18.

Kraup T. A contribution to the mathematical foundation of physical geodesity. Danish Geodetic Institute, 1969, Copenhagen, vol. 44.

Lerch F. I. Model improvement using GEOS-3 (GEM 9 and 10). *J. Geophys. Res.* 1979, no. 138, pp. 3897–3916.

Marchenko A. N. Parameterization of the Earth’s Gravity Field: Point and Line Singularities. Published by Lviv Astronomical and Geodetic Society. Lviv, Ukraine, 1998, 210 p.

Moritz G. Fundamental geodetic constant. Proceedings of the IAG XVII Gener. Assemb. IUGG/IAG, 1979, p. 24.

Pavlis N. K, Holmes S. A., Kenyon S. C. An Earth Gravitational Model to degree 2160: EGM2008. EGU General Assembly. Geophysical Reaseach Abstracts. 2008, no. 10, p. 2.

Yung D. N., Sjogren W., Konopliv A. S. Gravity field of Mars: 75 degree and order model. *Geophys. Res.* 2001, no. 10, pp. 23377–2340.

Надійшла 16.03.2016 р.