ГЕОДЕЗІЯ І КАРТОГРАФІЯ

УДК 528.23

В.Н. Баландин[1], М.Я. Брынь[2], И.В. Меньшиков[3], Ю.Г. Фирсов[4], С.Л. Штерн[5], Аббуд Мохаммед[6]
[1,3]Филиал ФГУП “ЦНИИГАиК – ОО и СШ”, г. Санкт-Петербург,
[2]ФГБОУ ВПО “Петербургский государственный университет путей сообщения”, г. Санкт-Петербург,
[4]ФБОУ ВПО “Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова”, г. Санкт-Петербург,
[5]ООО “РФН-Геодезия СПб.”, г. Санкт-Петербург,
[6]Международный университет, г. Бейрут

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ВЫСОТ И ШИРОТ, ВЫЧИСЛЯЕМЫХ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ

© Баландин В.Н., Брынь М.Я., Меньшиков И.В., Фирсов Ю.Г., Штерн С.Л., Аббуд Мохаммед, 2013

Предложены формулы оценки точности геодезических высот и широт по пространственным прямоугольным координатам. Анализ показал, что точность определения высот и широт не зависит от положения точек. Точность высот равна точности определения пространственных координат (при условии их равноточности), а широт (в угловых секундах) – точности координат (в метрах), умноженной на коэффициент 0,032.

Proposed formula to assess the accuracy of geodetic altitudes and latitudes on the spatial rectangular coordinates. The analysis has shown, that the accuracy of determination of altitudes and latitudes does not depend on the provisions of points. The accuracy of the heights is equal to the accuracy of determination of spatial coordinates (provided they are uniform accuracy), and latitudes (in arc seconds) – the accuracy of the coordinates (in meters), multiplied by the coefficient of 0,032.

В работах [1–3] предложены безитерационные формулы вычисления геодезических высот H и широт B геодезических пунктов по геоцентрическим (квазигеоцентрическим) пространственным прямоугольным координатам X, Y, Z, определяемых по наблюдениям спутников спутниковых навигационных систем. Они имеют следующий вид:

$$H = \left(D - \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \dfrac{S^2}{D^2}}} \right) \cos\left(\frac{e^2 SZ}{D^2} \right), \tag{1}$$

$$\mathrm{tg}B = \left(1 - \frac{He^2 Q}{Z\sqrt{1+Q^2}} \right) Q, \tag{2}$$

где $D = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, $S = \sqrt{X^2 + Y^2}$, b, e – малая полуось и первый эксцентриситет земного эллипсоида, $Q = \dfrac{Z}{(1-e^2)S}$.

Однако вопросы оценки точности остались не решенными, хотя одно из основных преимуществ предложенных формул заключается в том, что они позволяют значительно упростить алгоритмы оценки точности, т. к. отпадает необходимость в промежуточных вычислениях и итерационных процессах.

Рассмотрим эти вопросы.

Для вычисления средней квадратической ошибки m_H определения H по известным средним квадратическим ошибкам m_X, m_Y, m_Z при условии независимости X, Y, Z воспользуемся формулой

$$m_H = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2 m_X^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Y}\right)^2 m_Y^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Z}\right)^2 m_Z^2} .$$

При взятии частных производных пренебрежем значением cos в формуле (1). В результате получим $\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right) = \frac{X}{D} - \frac{e^2 bXZ^2}{D(D^2 - e^2S^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\left(\frac{\partial H}{\partial Y}\right) = \frac{Y}{D} - \frac{e^2 bYZ^2}{D(D^2 - e^2S^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\left(\frac{\partial H}{\partial Z}\right) = \frac{Z}{D} - \frac{e^2 bZS^2}{D(D^2 - e^2S^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Вычисление средней квадратической ошибки m_B определения B по известным средним квадратическим ошибкам m_X, m_Y, m_Z, m_H при условии независимости X, Y, Z, H выполним по формуле

$$m_H = \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial X}\right)^2 m_X^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial Y}\right)^2 m_Y^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial Z}\right)^2 m_Z^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial H}\right)},$$

где при $C = \frac{Z^2\left[1 - \frac{e^2 H}{(1-e^2)S\sqrt{1+Q^2}}\right]^2}{(1-e^2)^2 S^2} + 1$, $\left(\frac{\partial B}{\partial X}\right) = -\left[\frac{e^2 XHQ^2(2Q^2-1)}{ZS^2(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}C} + \frac{XQ}{S^2C}\right]$;

$$\left(\frac{\partial B}{\partial Y}\right) = -\left[\frac{e^2 YHQ^2(2Q^2-1)}{ZS^2(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}C} + \frac{YQ}{S^2C}\right]; \quad \left(\frac{\partial B}{\partial Z}\right) = \frac{Q}{ZC} - \frac{e^2 HQ^2}{Z^2(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}C}; \quad \left(\frac{\partial B}{\partial H}\right) = -\frac{e^2 Q^2}{Z\sqrt{1+Q^2}C}.$$

Правильность приведенных формул проверена следующим образом. Задавались геодезические координаты B, L, H точек и по формулам Гельмерта

$$X = (N+H)\cos B\cos L;$$

$$Y = (N+H)\cos B\sin L;$$

$$Z = ((1-e^2)N+H)\sin B$$

вычислялись их пространственные координаты.

Здесь $N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$ – радиус кривизны первого вертикала, a, α – большая полуось и сжатие земного эллипсоида. Вычисления выполнялись с учетом параметров общеземного эллипсоида, применяемого в системе координат ГСК-2011 ($a = 6378136{,}5$ м, $\alpha = \frac{1}{298{,}2564151}$). Затем вычислялись искомые высоты и широты и средние квадратические ошибки их определения. Правильность вычисления ошибок подтверждалась вычислениями в среде математического пакета MathCad, в котором есть функция вычисления производных.

Результаты вычислений для ряда точек представлены в таблице.

Результаты вычислений

№ з/п	Исходные данные		Результаты вычислений		
	B L H, м	m_X, м m_Y, м m_Z, м	X, м Y, м Z, м	H, м B	m_H, м m_B
1	2	3	4	5	6
1	10° 10° 1000	0,05 0,05 0,05	6187406,4291 1091006,6940 1100422,0899	1000,000008 $9^\circ 59' 59{,}99999996''$	0,050 $0{,}0016''$
2	45° 30° 1000	0,05 0,05 0,05	3912960,5485 2259148,8260 4488055,1024	1000,00004 $44^\circ 59' 59{,}99999994''$	0,050 $0{,}0016''$
3	89° 179° 10000	0,05 0,05 0,05	– 111845,6734 1952,2735 6365775,5474	9999,99999989 $89^\circ 00' 00{,}00000000''$	0,050 $0{,}0016''$
4	0° 0° 10000	0,03 0,03 0,03	0 0 6366751,7580	10000,0000000093 $90^\circ 00' 00{,}00000000''$	0,030 $0{,}00097''$

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

Предложенные формулы позволяют определять геодезические высоты и широты по результатам спутниковых геодезических определений в любой точке поверхности Земли, в том числе на экваторе, полюсе, нулевом меридиане и меридиане 180°. При этом математическая точность предложенных алгоритмов не превышает 0,1 мм для высот и $0{,}0000001''$ для широт (см. графы 2 и 5 таблицы). Фактическая точность (с учетом ошибок измерений) определения высот и широт не зависит от положения точек в пространстве. При этом, если обеспечивается равенство ошибок $m_X = m_Y = m_Z = m_{XYZ}$ определения координат, то ошибка определения геодезической высоты m_H равна ошибке определения координат, т. е. $m_H = m_{XYZ}$, а ошибка определения широты – $m_B = \frac{\rho}{R} m_{XYZ} = K m_{XYZ}$ (здесь R – радиус Земли, ρ – число угловых секунд в радиане, коэффициент K = 0,032 имеет размерность $(''/\text{м})$).

Предложенные формулы оценки точности могут найти применение при оценке точности определения нормальных высот по результатам спутниковых геодезических измерений, для чего надо решать еще задачу оценки точности нахождения высот квазигеоида над эллипсоидом.

1. Алгоритм вычисления геодезической высоты по пространственным прямоугольным координатам / В.Н. Баландин, М.Я. Брынь, И.В. Меньшиков и др. // Геодезия и картография. – 2006. – №6. – С. 15–16. 2. К вопросу вычисления геодезической высоты по пространственным прямоугольным координатам / В.Н. Баландин, М.Я. Брынь, И.В. Меньшиков и др. // Геодезия и картография. – 2012. – №1. – С. 2–4. 3. К вопросу вычисления геодезической широты по пространственным прямоугольным координатам / В.Н. Баландин, М.Я. Брынь, И.В. Меньшиков и др. // Геодезия и картография. – 2012. – №2. – С. 9–11.