УДК 528.11:519.211

Б. Пряха
Київський національний університет будівництва і архітектури

ОЗНАЧЕННЯ СУМИ, РІЗНИЦІ ТА ДОБУТКУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Обосновано определение и три теоремы теории точности измерений.

Definition and three theorems theory of accuracy of measurements are substantiated

Постановка проблеми. Якщо є дві випадкові величини X, Y, то їх суму, різницю та добуток визначають за такими схемами: $Z = X + Y$; $V = X - Y$; $U = XY$.

Для застосування цих схем під час опрацювання результатів геодезичних, фотограмметричних вимірювань, важливо:

1) розглянути алгебраїчні операції, за якими знаходять величини Z, V, U;
2) обґрунтувати означення суми, різниці та добутку двох випадкових величин;
3) навести приклади обчислення головних характеристик величин Z, V, U.

У [1] обгрунтовано явне означення дисперсії:

$$\sigma^2 \equiv E\left[\frac{(X-X)^2}{2}\right] \equiv \frac{\overline{d'^2}}{2} = \sum_{i=1}^{k_G-1}\sum_{j=i+1}^{k_G}(x_j - x_i)^2 f(x_j) f(x_i). \tag{1}$$

де $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ і називається стандартним відхиленням; $\overline{d'^2}$ – квадрат середньої квадратичної різниці значень елементів бінарних відношень, що утворюють декартовий квадрат величини X; k_G – обсяг повної групи $G = \{x\}$ значень величини X; k – обсяг генеральної сукупності вимірів; $f(x)$ – функція розподілу ймовірностей [2].

Оскільки явне означення дисперсії σ^2 обгрунтовано, тому твердження, що розкривають особливості цієї дисперсії, потребують доведення за означенням (1).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У [3] встановлено, що середньому значенню

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{k_G} x_i f(x_i) \tag{2}$$

потрібно приписувати таке відхилення:

$$\sigma_\mu = \bar{\sigma} = \sqrt{2}\sigma, \tag{3}$$

де $\bar{\sigma}$ називається середнім стандартним відхиленням.

Дисперсія σ_Y^2 суми $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі $S_{(K)}$ значень коваріаційної матриці системи цих величин [4]:

$$\sigma_Y^2 = D(Y) = S_{(K)} = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} Cov(X_i, X_j). \tag{4}$$

Мета статті. Обґрунтувати означення та теореми теорії точності вимірювань.

Виклад основного матеріалу дослідження. Середнє значення μ, дисперсія σ^2 визначаються в генеральній сукупності, тобто у сукупності, яка має повну групу G значень результатів вимірювань, наповненість $F = 1$, таку добротність Q, що дає змогу встановити розподіл ймовірностей показників випадкової величини [5].

Числові характеристики μ, дисперсії σ^2 є математичні сподівання. Кожна з цих величин є якесь число. Згідно з теоремою ймовірностей про сталі величини: $E(\mu)=\mu$; $E(\sigma^2)=\sigma^2$ [6].

Т е о р е м а 1. *Дисперсія σ^2 являє собою середнє значення квадратів відхилень результатів вимірювань від середнього значення цих результатів:*

$$\sigma^2=\mu_{[(X-\mu)^2]}=E[(X-\mu)^2]=\sum\nolimits_{i=1}^{k_G}(x_i-\mu)^2 f(x_i)\,. \tag{5}$$

Д о в е д е н н я. За означенням (1)

$$\sigma^2 \equiv E\left[\frac{(X-X)^2}{2}\right]=\frac{1}{2}E[(X-X)^2]=\frac{1}{2}E\{[(X-\mu)-(X-\mu)]^2\}=$$

$$=\frac{1}{2}E[(X-\mu)^2-2(X-\mu)(X-\mu)+(X-\mu)^2]=E[(X-\mu)^2-(X-\mu)(X-\mu)]=$$

$$=E(X-\mu)^2-E(X-\mu)E(X-\mu)].$$

У цьому рівнянні $E(X-\mu)=E(X)-E(\mu)=\mu-\mu=0.$ Врахувавши цей вираз, одержимо: $\sigma^2=E[(X-\mu)^2].$

Оскільки, ймовірність $f[(x-\mu)^2]$ квадрата відхилення x від μ дорівнює $f(x)$, а обсяг значень x дорівнює k_G, то згідно з означенням (2)

$$\sigma^2=\mu_{[(X-\mu)^2]}=E[(X-\mu)^2]=\sum\nolimits_{i=1}^{k_G}(x_i-\mu)^2 f[(x_i-\mu)^2]=\sum\nolimits_{i=1}^{k_G}(x_i-\mu)^2 f(x_i).$$

Теорему доведено.

Т е о р е м а 2. *Дисперсія σ^2 – це різниця математичного сподівання квадрата величини X і квадрата середнього значення результатів вимірювань:*

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2=\sum\nolimits_{i=1}^{k_G}x_i^2 f(x_i)-\mu^2. \tag{6}$$

Д о в е д е н н я. За означенням (1)

$$\sigma^2 \equiv E\left[\frac{(X-X)^2}{2}\right]=\frac{1}{2}E[(X-X)^2]=\frac{1}{2}E(X^2-2XX+X^2)=$$

$$=E(X^2-XX)=E(X^2)-E(X)E(X)=E(X^2)-\mu^2.$$

Ймовірність $f(x^2)$ квадрата показника x величини X дорівнює $f(x)$. Отже,

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2=\sum\nolimits_{i=1}^{k_G}x_i^2 f(x_i^2)-\mu^2=\sum\nolimits_{i=1}^{k_G}x_i^2 f(x_i)-\mu^2.$$

Теорему доведено.

З особливостей випадкових величин випливають такі дві пропозиції до додавання, віднімання та множення випадкових величин:

1. Величини X,Y приймають значення із одного і того самого простору.

2. Випадкові суми, різниці та добутки утворюються із сукупностей значень двох випадкових величин з використанням прямих групових алгебраїчних операцій.

Згідно з наведеними пропозиціями будемо дотримуватись двох вимог:

1) обсяги сукупностей результатів вимірювань мають бути однакові;

2) результати вимірювань розглядаються в дискретному часі t, тобто в тій послідовності, в якій вони були прочитані на цифровому табло електронного геодезичного приладу.

О з н а ч е н н я: Є дві генеральні сукупності X',Y' результатів вимірювань

$$X' = (x') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_k \end{pmatrix}; \quad Y' = (y') = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \dots \\ y'_k \end{pmatrix}.$$

Виконуються прямі групові алгебраїчні операції додавання, віднімання та множення значень цих сукупностей вимірів

$$X' + Y' = \begin{pmatrix} x'_1 + y'_1 \\ x'_2 + y'_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x'_k + y'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \dots\dots \\ z'_k \end{pmatrix} = (z') = Z' \ (\textit{пряма сума}); \tag{7}$$

$$X' - Y' = \begin{pmatrix} x'_1 - y'_1 \\ x'_2 - y'_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x'_k - y'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \dots\dots \\ v'_k \end{pmatrix} = (v') = V' \ (\textit{пряма різниця}); \tag{8}$$

$$X'Y' = \begin{pmatrix} x'_1 y'_1 \\ x'_2 y'_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x'_k y'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \dots\dots \\ u'_k \end{pmatrix} = (u') = U' \ (\textit{прямий добуток}) \tag{9}$$

У сукупностях значень прямої суми $Z' = (z')$, прямої різниці $V' = (v')$ та прямого добутку $U' = (u')$ вимірів визначаються відповідно три множини $Z = \{z\}$, $V = \{v\}$, $U = \{u\}$ показників сум, різниць та добутків, що являють собою області значень трьох числових змінних, які називаються *випадковими величинами* $Z = X + Y$; $V = X - Y$; $U = XY$, або *випадковою сумою, різницею* та *добутком* величин X, Y.

П р и к л а д 1. Електронним тахеометром 3Та5Р, 2003 р, №15377 виміряні дві короткі лінії. Обсяг значень кожної сукупності вимірів $k = 50$. Результати вимірювань, прямі суми, різниці та добутки значень двох генеральних сукупностей вимірів наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Результати вимірювань, прямі суми, різниці та добутки

№ з/п	Виміри, відхилення (мм) добутки відхилень (мм^2)					Суми, різниці (мм) добутки (мм^2)		
	x'	$\delta_{x'}$	y'	$\delta_{x'}$	$\delta_{x'}\delta_{y'}$	z'	v'	u'
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6690	-0,92	5406	-1,06	0,9752	12096	1284	36166140
2	6692	1,08	5407	-0,06	-0,0648	12099	1285	36183644
3	6691	0,08	5408	0,94	0,0752	12099	1283	36184928
4	6691	0,08	5406	-1,06	-0,0848	12097	1285	36171546
5	6691	0,08	5406	-1,06	-0,0848	12097	1285	36171546
6	6690	-0,92	5407	-0,06	0,0552	12097	1283	36172830
7	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
8	6690	-0,92	5408	0,94	-0,8648	12098	1282	36179520
9	6691	0,08	5408	0,94	0,0752	12099	1283	36184928
10	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
11	6690	-0,92	5406	-1,06	0,9752	12096	1284	36166140

12	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
13	6691	0,08	5408	0,94	0,0752	12099	1283	36184928
14	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
15	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
16	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
17	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
18	6690	-0,92	5407	-0,06	0,0552	12097	1283	36172830
19	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
20	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
21	6691	0,08	5408	0,94	0,0752	12099	1283	36184928
22	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
23	6691	0,08	5406	-1,06	-0,0848	12097	1285	36171546
24	6692	1,08	5408	0,94	1,0152	12100	1284	36190336
25	6692	1,08	5406	-1,06	-1,1448	12098	1286	36176952
26	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
27	6691	0,08	5408	0,94	0,0752	12099	1283	36184928
28	6691	0,08	5408	0,94	0,0752	12099	1283	36184928
29	6692	1,08	5406	-1,06	-1,1448	12098	1286	36176952
30	6691	0,08	5408	0,94	0,0752	12099	1283	36184928
31	6690	-0,92	5407	-0,06	0,0552	12097	1283	36172830
32	6690	-0,92	5407	-0,06	0,0552	12097	1283	36172830
33	6690	-0,92	5407	-0,06	0,0552	12097	1283	36172830
34	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
35	6691	0,08	5406	-1,06	-0,0848	12097	1285	36171546
36	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
37	6691	0,08	5406	-1,06	-0,0848	12097	1285	36171546
38	6692	1,08	5407	-0,06	-0,0648	12099	1285	36183644
39	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
40	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
41	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
42	6690	-0,92	5407	-0,06	0,0552	12097	1283	36172830
43	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
44	6690	-0,92	5407	-0,06	0,0552	12097	1283	36172830
45	6691	0,08	5407	-0,06	-0,0048	12098	1284	36178237
46	6691	0,08	5406	-1,06	-0,0848	12097	1285	36171546
47	6691	0,08	5408	0,94	0,0752	12099	1283	36184928
48	6691	0,08	5408	0,94	0,0752	12099	1283	36184928
49	6691	0,08	5408	0,94	0,0752	12099	1283	36184928
50	6692	1,08	5408	0,94	1,0152	12100	1284	36190336
Суми:		0		0	1,24			

Потрібно встановити розподіл ймовірностей величин X, Y, $Z = X + Y$, $V = X - Y$, $U = XY$, визначити головні числові характеристики цих величин.

У стовпцях 2, 4 таблиці записані результати x_i', y_i' вимірювань в порядку їх появи на цифровому табло тахеометра, а в стовпцях 7, 8, 9 – відповідно елементарні прямі суми, різниці та добутки.

Розподіл ймовірностей показників величин X, Y відображено в табл. 2.

Таблиця 2

Розподіл величин X, Y

Величини, їх групи G	X			Y		
	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
Показники (мм)	6690	6691	6692	5406	5407	5408
Обсяги k_x, k_y	10	34	6	10	27	$0,20$
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(y_1)$	$f(y_2)$	$f(y_3)$
$p(x)$	$0,20$	$0,68$	$0,12$	$0,20$	$0,54$	$0,26$

Величини мають ступені квантування значень $[Q_X]=[Q_Y]=1$ мм, розмахи значень $W_X=W_Y=2$ мм. Обсяги повних груп $k_{G_X}=k_{G_Y}=3$.

Ймовірності $p(x)$ обчислені за емпіричною функцією $f(x)=k_x/k$, де k_x – кількість вимірів, що мають значення x; k – обсяг генеральної сукупності.

Визначимо середнє значення за означенням (2), а дисперсію за правилом (6)

$\mu_X=E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i f(x_i)=(0)(0,2)+(1)(0,68)+(2)(0,12)=0,92\Rightarrow 6690,92$ мм;

$E(X^2)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2 f(x_i)=(0)(0,2)+(1)(0,68)+(4)(0,12)=1,16$ мм^2;

$\sigma_X^2=E(X^2)-\mu_X^2=1,16-(0,92)^2=0,3136$ мм^2.

Аналогічно були знайдені числові характеристики величини Y:

$\mu_Y=E(Y)=7,06\Rightarrow 5407,06$ мм; $E(Y^2)=50,3$ мм^2; $\sigma_Y^2=0,4564$ мм^2.

У стовпцях 3, 5, табл. 1 наведені відхилення $\delta_{x'}=x'-\mu_X$; $\delta_{y'}=y'-\mu_Y$, а в стовпці 6 – добутки $\delta_{x'}\delta_{y'}$, знайдена сума добутків $\sum_{i=1}^{50}\delta_{x_i'}\delta_{y_i'}=1,24$ мм^2.

Обчислимо коваріацію X і Y:

$$Cov(X,Y)=E[(X'-\mu_X)(Y'-\mu_Y)]=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\delta_{x_i'}\delta_{y_i'}=\frac{1}{50}1,24=0,0248\,\text{мм}^2.$$

Оскільки, обсяг генеральної сукупності дорівнює k, то мірою ймовірності появи окремої пари (x,y) показників величин Z,V,U є така емпірична функція:

$$f(x,y)=\frac{k_{(x,y)}}{k}=p(x,y),$$

де $k_{(x,y)}$ – обсяг окремих пар (x,y) показників вимірів.

Кількість пар показників $n_{(x,y)}=k_{G_X}k_{G_Y}=(3)(3)=9$, а їхні обсяги мають вигляд

$$k_{(x,y)}=\begin{bmatrix}k_{(x_1,y_1)} & k_{(x_1,y_2)} & k_{(x_1,y_3)}\\ k_{(x_2,y_1)} & k_{(x_2,y_2)} & k_{(x_2,y_3)}\\ k_{(x_3,y_1)} & k_{(x_3,y_2)} & k_{(x_3,y_3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7 & 1\\ 6 & 18 & 10\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Контроль: $\sum_{i=1}^{k_{G_X}}\sum_{j=1}^{k_{G_Y}}k_{(x_i,y_j)}=(2)(4)+7+1+6+18+10=50=k$.

Ймовірності появи окремих пар показників виглядають так:

$$p_{(x,y)}=\begin{bmatrix}f(x_1,y_1) & f(x_1,y_2) & f(x_1,y_3)\\ f(x_2,y_1) & f(x_2,y_2) & f(x_2,y_3)\\ f(x_3,y_1) & f(x_3,y_2) & f(x_3,y_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,04 & 0,14 & 0,02\\ 0,12 & 0,36 & 0,20\\ 0,04 & 0,04 & 0,04\end{bmatrix}.$$

Знайдемо сукупність значень (мм) величини $Z=X+Y$

$$Z=X+Y=\begin{bmatrix}x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3\\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & x_2+y_3\\ x_3+y_1 & x_3+y_2 & x_3+y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_1 & z_2 & z_3\\ z_2 & z_3 & z_4\\ z_3 & z_4 & z_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12096 & 12097 & 12098\\ 12097 & 12098 & 12099\\ 12098 & 12099 & 12100\end{bmatrix}.$$

Повна група значень $G_Z=\{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5\}$ величини Z має обсяг $k_{G_Z}=5$, ступінь квантування значень $[Q_z]=z_{i+1}-z_i=1$ мм, розмах $W_Z=z_5-z_1=4$ мм.

Контроль [7]: $W_X+W_Y=2+2=4\,\text{мм}=W_Z$.

У результаті додавання виявились однакові значення окремих незалежних сум:

$$z_2=x_1+y_2=x_2+y_1;$$

$$z_3=x_1+y_3=x_2+y_2=x_3+y_1;$$

$$z_4 = x_2 + y_3 = x_3 + y_2.$$

Згідно з другою аксіомою ймовірностей:

$$p(z_2) = f(z_2) = f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1);$$

$$p(z_3) = f(z_3) = f(x_1, y_3) + f(x_2, y_2) + f(x_3, y_1);$$

$$p(z_4) = f(z_4) = f(x_2, y_3) + f(x_3, y_2).$$

У табл. 3 наведено розподіл ймовірностей величини $Z = X + Y$.

Таблиця 3

Розподіл величини $Z = X + Y$

Повна група $G_Z = \{z\}$	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
Показники z (мм)	12096	12097	12098	12099	0,04
Ймовірності $p(z)$	0,04	0,26	0,42		0,04

Величина Z має такі числові характеристики:

$$\mu_Z = \mu_{(X+Y)} = 12097{,}98 \text{ мм}; \; E(Z^2) = 146361120{,}9 \text{ мм}^2; \; \sigma_Z^2 = \sigma_{(X+Y)}^2 = 0{,}8196 \text{ мм}^2.$$

Контроль:

$$\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2Cov(X,Y) = 0{,}3136 + 0{,}4564 + (2)(0{,}0248) = 0{,}8196 \text{ мм}^2 = \sigma_Z^2.$$

Сукупність значень (мм) величини $V = X - Y$ виглядає так:

$$V = X - Y = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 & x_1 - y_2 & x_1 - y_3 \\ x_2 - y_1 & x_2 - y_2 & x_2 - y_3 \\ x_3 - y_1 & x_3 - y_2 & x_3 - y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_3 & v_2 & v_1 \\ v_4 & v_3 & v_2 \\ v_5 & v_4 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1284 & 1283 & 1282 \\ 1285 & 1284 & 1283 \\ 1286 & 1285 & 1284 \end{bmatrix}.$$

Повна група значень $G_V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ цієї величини має ступінь квантування $[Q_V] = 1$ мм, розмах значень $W_V = v_5 - v_1 = 4$ мм $= W_X + W_Y$.

У табл. 4 наведено розподіл ймовірностей величини $V = X - Y$.

Таблиця 4

Розподіл величини $V = X - Y$

Повна група $G_V = \{v\}$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
Показники v (мм)	1282	1283	1284	1285	1286
Ймовірності $p(v)$	0,02	0,34	0,44	0,16	0,04

За цим розподілом знайдені числові характеристики величини V:

$$\mu_V = \mu_{(X-Y)} = 1283{,}86 \text{ мм}; \; E(V^2) = 1648297{,}22 \text{ мм}^2; \; \sigma_V^2 = \sigma_{(X-Y)}^2 = 0{,}7204 \text{ мм}^2.$$

Контроль:

$$\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2Cov(X,Y) = 0{,}3136 + 0{,}4564 - (2)(0{,}0248) = 0{,}7204 \text{ мм}^2 = \sigma_V^2.$$

Визначимо множину значень (мм^2) величини $U = XY$

$$U = \{36100000 + u\} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 & u_6 \\ u_2 & u_5 & u_8 \\ u_4 & u_7 & u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66140 & 72830 & 79520 \\ 71546 & 78237 & 84928 \\ 76952 & 83644 & 90336 \end{bmatrix}.$$

Множина $\{u_1, u_2, ..., u_9\}$ має розмах значень $W_U = u_9 - u_1 = 24196$ мм^2, обсяг $k_U = 9$. Одержаний ряд показників не є арифметичною прогресією, тому величина U не характеризується ступенем квантування значень.

Розподіл ймовірностей величини $U = XY$, який наведено в табл. 5 не є нормальним, оскільки з розподілу виходить, що величина U має три моди: u_3, u_5, u_8.

Таблиця 5

Розподіл величини $U = XY$

Множина $G=\{u\}$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
Ймовірності $p(u)$	0,04	0,12	0,14	0,04	0,36	0,02	0,04	0,20	0,04

Ця величина має такі числові характеристики:

$$\mu_U = \mu_{(XY)} = 36178205{,}92 \text{ мм}^2;\ E(U^2) = 1308862614985507 \text{ мм}^4;\ \sigma_U^2 = \sigma_{(XY)}^2 = 31395583{,}9536 \text{ мм}^4;$$

$$P = \mu_X \mu_Y = (6690{,}92)(5407{,}06) = 36178205{,}8952 \text{ мм}^2 = 36{,}178 \text{ м}^2.$$

Контроль:

$$\mu_{(XY)} - \mu_X \mu_Y = 36178205{,}92 - 36178205{,}8952 = 0{,}0248 \text{ мм}^2 = Cov(X,Y).$$

Т е о р е м а 3. *Якщо є розподіли ймовірностей величин:* X, Y, $Z = X+Y$, $V = X-Y$, *тоді середнє значення, дисперсія величини* $U = XY$ *визначаються так*:

$$\mu_{(XY)} = \frac{E(Z^2) - E(V^2)}{4}; \tag{10}$$

$$\sigma_{(XY)}^2 = \frac{E(Z^4) + E(V^4) - 2[E(X^4) + E(Y^4)]}{12} - \mu_{(XY)}^2, \tag{11}$$

де $E(Z^2)$, $E(V^2)$; $E(Z^4)$, $E(V^4)$, $E(X^4)$, $E(Y^4)$ – це початкові моменти другого і четвертого порядку відповідно величин Z, V, X, Y.

Д о в е д е н н я. Розглянемо початкові моменти другого порядку величин Z, V:

$$E(Z^2) = E[(X+Y)^2];\ E(V^2) = E[(X-Y)^2].$$

Від лівої та правої частин першого рівняння віднімемо частини другого рівняння

$$E(Z^2) - E(V^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) - E(X^2 - 2XY + Y^2) =$$

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2 - X^2 + 2XY - Y^2) = 4E(XY) = 4\mu_{(XY)}.$$

Від цього рівняння приходимо до рівності (10).

Використавши біном Ньютона, знайдемо суму початкових моментів четвертого порядку величин Z, V:

$$E(Z^4) + E(V^4) = E[(X+Y)^4] + E[(X-Y)^4] =$$

$$= E[(X+Y)^4 + (X-Y)^4] = E[(X^4 + 4X^3Y + 6X^2Y^2 + 4XY^3 + Y^4) +$$

$$+ (X^4 - 4X^3Y + 6X^2Y^2 - 4XY^3 + Y^4)] = 2[E(X^4) + E(Y^4)] + 12E[(XY)^2].$$

Отже,

$$E[(XY)^2] = \frac{E(Z^4) + E(V^4) - 2[E(X^4) + E(Y^4)]}{12}. \tag{12}$$

Дисперсію величини $U = XY$ визначимо за правилом (6):

$$\sigma_{(XY)}^2 = E[(XY)^2] - \mu_{(XY)}^2. \tag{13}$$

Підставивши вираз (12) в (13), одержимо рівність (11).

Теорему доведено.

П р и к л а д 2. Необхідно за правилами (10), (11) повторно знайти середнє значення та дисперсію величини $U = XY$.

Маємо,

$$\mu_{(XY)} = \frac{E(Z^2) - E(V^2)}{4} = \frac{146361120{,}9 - 1648297{,}22}{4} = \frac{144712823{,}7}{4} = 36178205{,}92 \text{ мм}^2.$$

Початкові моменти четвертого порядку величин X, Y, Z, V, розподіли яких наведені в табл. 2, 3, 4 виглядають так (мм^4):

$$E(X^4) = \sum_{i=1}^{3} x_i^4 p(x_i) = 2004210658133465;$$

$$E(Y^4) = \sum_{i=1}^{3} y_i^4 p(y_i) = 854761191659884,7;$$

$$E(Z^4) = \sum_{i=1}^{5} z_i^4 p(z_i) = 21421578190936126,26;$$

$$E(V^4) = \sum_{i=1}^{5} v_i^4 p(v_i) = 2716888476657,14.$$

Обчислимо дисперсію (мм^4)

$$\sigma^2_{(XY)} = \frac{E(Z^4) + E(V^4) - 2[E(X^4) + E(Y^4)]}{12} - \mu^2_{(XY)} =$$

$$= \frac{21424295079412783,4 - 2(2858971849793349,7)}{12} - (36178205,92)^2 =$$

$$= 1308862614985507 - 1308862583589923,0464 = 31395583,9536.$$

Якщо визначається величина $U = XY$, то за результат обчислень приймається добуток $P = \mu_X \mu_Y$. Оскільки, різниця $\mu_{(XY)} - P = Cov(X,Y)$, то згідно з теоремою [8] розсіювання величини U стосовно центра P виглядає так:

$$\sigma_P^2 = \sigma_{XY}^2 + [Cov(X,Y)]^2 = 31395583,9536 + (0,0248)^2 = 31395583,9542 \text{ мм}^4.$$

За теоремою (3) припишемо величині P таке середнє стандартне відхилення:

$$\bar{\sigma}_P = \sqrt{2\sigma_P^2} = \sqrt{(2)(31395584)} = 7924 \text{ мм}^2 = 0,79 \text{ дм}^2.$$

Висновки. 1. Означення суми, різниці та добутку випадкових величин є явним означенням, оскільки воно розкриває сутність величин $Z = X + Y$, $V = X - Y$, $U = XY$, наводить правила (7), (8), (9) визначення сукупностей значень цих величин. 2. Достовірні числові характеристики розсіювання значень сум, різниць випадкових величин одержують за законом додавання дисперсій (4). 3. Якщо дискретні величини X, Y мають нормальний розподіл ймовірностей, то їх сума Z, різниця V також будуть нормально розподілені, а величина $U = XY$ не матиме нормального розподілу ймовірностей. 4. Теореми (5), (6) – це відомі твердження, але їх доведення виконано за явним означенням (1) дисперсії σ^2. 5. Правила (10), (11) розкривають особливості визначення головних числових характеристик добутку двох випадкових величин.

Перспективи подальших розвідок в цьому напрямку полягають в обгрунтуванні означення суми неперервних випадкових величин.

1. Пряха Б. Явні означення дисперсій σ^2, Σ^2 // Зб. наук. пр. “Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва”. – Львів. – 2008. – Вип. I(15). – С. 110–117. 2. Walpole Ronald E, Myers Raymond H. Probability and Statistics for Engineers and Scientists. 3-th edition, Macmillan Publishing Company. – New York, 1985. – 639 p. 3. Пряха Б. Оцінювання середніх значень // Зб. наук. пр. “Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва”. – Львів. – 2007. – Вип. I(13). – С. 140–145. 4. Пряха Б. Про зв´язок дисперсій та коваріацій // Геодезія картографія і аерофотознімання. – 2009. – Вип. 71. – С. 262–271. 5. Пряха Б.Г., Білецький Я.В. Про точність геодезичних вимірювань // Вісник геодезії та картографії. – 2003. – № 3. – С. 43–49. 6. Пряха Б.Г. Про числові характеристики результатів вимірювань // Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід. – Чернігів: ЧДІЕУ, 2008. – С. 97–108. 7. Пряха Б.Г. Про загальну оцінку точності вимірювань // Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід. – Чернігів: КП “Видавництво“Чернігівскі обереги”. – 2006. – С. 58–65. 8. Білецький Я.В., Пряха Б.Г. Про дисперсії геодезичних вимірів // Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід. – Чернігів: КП “Видавництво“Чернігівскі обереги”. – 2005. – С. 55–57.