

**ПРО ЄДИНИЙ АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ГУСТИНИ,  
ПОТЕНЦІАЛУ ТА ЕНЕРГІЇ ОДНОВИМІРНОГО РОЗПОДІЛУ МАС  
ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ПЛАНЕТИ**

© Фис М., Нікулішин В., 2009

*Приведен алгоритм аппроксимации одномерных распределений масс планеты по полиномам Лежандра и на его основе поданы формулы определения потенциала и энергии для эллипсоидальной планеты, апробированные на конкретном примере.*

*The algorithm of 1D density distribution approximation by Legendre polynomials is presented. Based on this approximation the internal gravity potential and potential gravity energy of ellipsoid was estimated.*

**Постановка проблеми**

Основою для досліджень внутрішньої будови планет  $\tau$  є функція розподілу мас  $\delta$ , яка визначає інтегральні характеристики (потенціал, прискорення сили ваги, гравітаційна енергія). На сучасному етапі створені одновимірні моделі розподілу мас  $\delta(\rho)$ , які достатньо добре описують структуру в середині тіла  $\tau$ . Наприклад, для сферичної поверхні Землі побудовані моделі PREM[6], PREM[7], в яких густина подається поліномами за змінною  $\rho$ . Для інших небесних тіл існують гіпотетичні сферично-симетричні моделі мас, в яких враховано їхню практику побудови моделі Землі. Отже, є можливість за даним розподілом  $\delta$  знайти потенціал  $U$  і гравітаційну енергію  $E$ .

**Зв'язок із важливими науковими і практичними завданнями**

Обчислення значень внутрішнього потенціалу  $U$  і сили ваги  $g$  всередині планети дозволяє встановити їх особливості не тільки за глибиною, а і в довготно-широтних напрямках, наприклад, знаходити поверхні, так звані, максимальних значень  $g$ . Інтерпретація вимірюваних похідних функції  $U$  в середині планети (в глибоких шахтах або на океанічному дні) неможливе без урахування їх поведінки в тілі  $\tau$ , а визначення гравітаційної (потенціальної) енергії навіть для модельних розподілів є інструментом для дослідження геодинамічних процесів, що дозволяє розглядати планету як цілісний динамічний об'єкт.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій присвячених вирішенню цієї проблеми**

Побудові алгоритмів визначення потенціалу в середині еліпсоїдальної планети присвячено ряд робіт, зокрема в монографії [1] розроблено методику знаходження внутрішнього потенціалу і нормальної сили ваги еліпсоїдальних планет, яка враховує структуру Землі. В роботах [1, 3, 5] отримані формули, в яких потенціали  $U$  і  $E$  подано для одновимірних і трьохвимірних розподілів мас тіла. Крім того, оцінка внутрішнього потенціалу та його максимальне значення в центрі планети розглядались в роботах [1,6].

**Постановка завдання**

За даним радіальним кусково-неперервним розподілом  $\delta$  (для кулі  $K$  – сферично-симетричним) мас всередині еліпсоїдальної планети  $\tau$  
$$\tau \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right\} \leq 1$$

$$\delta(\rho) = \begin{cases} \delta_0(\rho), & 0 \leq \rho < \rho_0 \\ \delta_1(\rho), & \rho_0 \leq \rho < \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_m(\rho), & \rho_{m-1} \leq \rho \leq 1 \end{cases}, \quad (1)$$

визначити внутрішній потенціал  $U$  і гравітаційну енергію  $E$ , для функцій  $\delta_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ), що мають вигляд

$$\delta_i(\rho) = \sum_{j=0}^k a_{ij} \rho^j \quad (2)$$

$$\delta_i(\rho_l) \neq \delta_i(\rho_{l+1}), \quad 0 \leq l \leq m \quad (3)$$

### Виклад основного матеріалу

Зовнішній потенціал  $V$  однорідної кульової планети  $K$  визначається формулою

$$V = \frac{f \cdot M}{r}, \quad (4)$$

де  $M$  – маса тіла  $K$ ,  $r$  – радіус – вектор біжучої точки  $P$  (Рис.1).

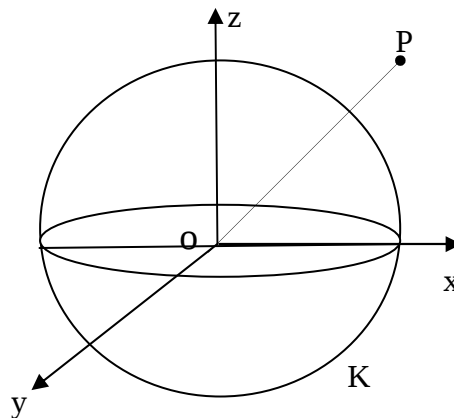


Рис. 1. Геометрична інтерпретація задачі

Зосередимось на побудові алгоритмів знаходження  $U$  і  $E$  в середині тіла, оскільки навіть для однорідної еліпсоїдальної планети  $\tau$  значення  $V$  подається складним співвідношенням у вигляді квадратичної функції декартових координат  $x, y, z$  і величин, залежних від еліпсоїдальних координат  $\zeta$  [2].

Вважаючи, що функція  $\delta(\rho)$  визначена для  $|\rho| \leq 1$  (Рис.2), представимо її у вигляді ряду за поліномами Лежандра парних степенів

$$\delta(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_{2n}(\rho). \quad (5)$$

Коефіцієнти  $C_n$  визначаються через лінійні комбінації степеневих моментів у вигляді

$$M_l = \int_0^1 \delta(\rho) \cdot \rho^{2l} d\rho \quad (6)$$

$$C_n = \frac{(4n+1)}{2} \int_{-1}^1 \delta(\rho) \cdot P_{2n}(\rho) d\rho = (4n+1) \int_0^1 \delta(\rho) P_{2n}(\rho) d\rho = (4n+1) \cdot \sum_{l=0}^n d_l \int_0^1 \delta(\rho) \rho^{2l} d\rho, \quad (7)$$

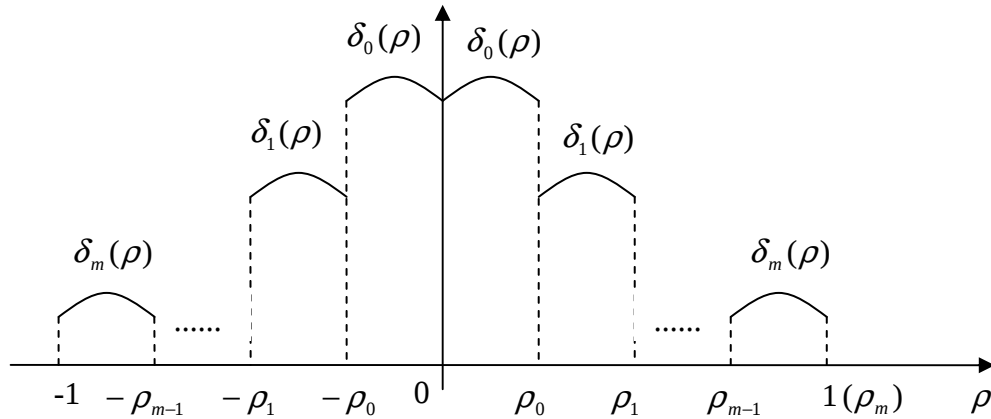


Рис.2 Схематичний графік функції  $\delta(\rho)$ , ( $|\rho| < 1$ )

Ряд (5) збігається в середньому, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left\{ \delta(\rho) - \sum_{m=0}^n C_m P_{2m}(\rho) \right\}^2 d\rho = 0,$$

звідки випливає рівність Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 (4n+1) = \int_0^1 \delta^2(\rho) d\rho, \quad (8)$$

яка є критерієм оптимального вибору кількості членів ряду і збіжності співвідношення (1).

Сумування в середньо-квадратичному гарантує рівномірну збіжність ряду

$$U(P) = f \int_{\tau} \frac{\delta}{r} d\tau = f \sum_{n=0}^{\infty} C_n U_n(P), \quad (9)$$

де

$$U_n(P) = f \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r(Q, P)} d\tau_Q = \sum_{l=0}^n d_l f \int_{\tau} \frac{\rho^{2l}}{r(Q, P)} d\tau = \sum_{l=0}^n d_l W_{2l}(P). \quad (10)$$

Користуючись методикою, наведеною в монографії [4], запишемо потенціали

$$W_e = \frac{3fV_{\tau}}{4(l+1)} \int_0^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{l+1} \right] \frac{dU}{Q(U)}, \quad (11)$$

де  $Q(U) = \sqrt{(a^2+u) \cdot (b^2+u) \cdot (c^2+u)}$ ,  $V_{\tau}$  – об'єм тіла  $\tau$ .

Використовуючи формули (2) і (9) визначаємо значення потенціальної енергії

$$E = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \delta U d\tau = -\frac{f}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{\tau} P_{2n}(\rho) d\tau \sum_{m=0}^{\infty} C_m U_m d\tau = -\frac{f}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_n C_m \int_{\tau} P_{2n}(\rho) U_m(\rho) d\tau. \quad (12)$$

Таким чином, обчисливши один раз коефіцієнти  $C_n$ , здійснюємо апроксимацію густини  $\delta$ , і за відповідними формулами (5) і (7) обчислюємо  $U$  та  $E$ .

Перевіримо даний алгоритм на прикладі кулі  $K$ , для якого можна знайти точні значення  $U$  і  $E$  і порівняти їх з обчисленими.

Введемо наступні позначення:  $\tau_i$  – куля радіуса  $\alpha_i R$ ,

$G_i$  – шар обмежений сферами радіусів:  $\rho_i = \alpha_i \cdot R$ ,  $\rho_{i-1} = \alpha_{i-1} \cdot R$ .

Еліпсоїдальна координата визначатиметься

$$\xi = \begin{cases} r^2 - R^2, & r > R \\ 0, & r \leq R \end{cases}.$$

Для функції  $\delta = \rho^l = (\rho^2)^{\frac{l}{2}}$  запишемо [4]

$$f(x^2) = \int_0^{x^2} (\rho^2)^{\frac{l}{2}} d(\rho^2) = \frac{2}{l+2} (x^2)^{\frac{l+2}{2}},$$

звідки отримаємо

$$W_l = \begin{cases} \frac{3V_{\tau_i} f}{R \cdot (l+2) \cdot \rho}, & \rho > 1 \\ \frac{3V_{\tau_i} f}{\alpha_i R} \left( 1 - \frac{\rho^{l+2}}{(l+3)\alpha_i^{l+2}} \right), & \rho \leq 1, \end{cases}$$

де  $\rho = \frac{r}{R}$  – відносний радіус,  $V_{\tau}$  – об'єм тіла  $\tau_i$ .

Тоді зовнішній і внутрішній потенціали кулі  $\tau_i$  з розподілом  $\delta_i(\rho)$  подаються відповідно

$$V_{\tau_i}^3 = \frac{3f}{R \cdot \rho} \sum_{l=0}^k \frac{a_{il}}{l+2} = \frac{fM_{\tau_i}}{\rho \cdot R}, \quad (M_{\tau_i} - \text{маса тіла } \tau_i), \quad (13)$$

$$U_{\tau_i}^e = \frac{3V_{\tau_i}}{R} \sum_{l=0}^k \frac{a_{il}}{l+2} \left( 1 - \frac{\rho^{l+2}}{\alpha_i^{l+2} (l+3)} \right). \quad (14)$$

Всередині тіла  $G_i$  для  $i > 0$  маємо

$$U_{G_i} = U_{\tau_i} - U_{\tau_{i-1}} = \frac{3V_k}{R} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} \frac{a_{il}}{l+2} \left( \alpha_i^3 - \alpha_{i-1}^3 - \frac{\rho^{l+2}}{l+3} \left( \frac{1}{\alpha_i^{l+1}} - \frac{1}{\alpha_{i-1}^{l+1}} \right) \right) \right],$$

і  $U_{G_0} = U_{\tau_0}$ .

Згідно теореми Айворі [4] значення потенціалу в порожнині  $G_i$  є постійним і його найпростіше знайти в центрі кулі  $\tau_i$ , тобто

$$U_{G_i}(0) = \int_{G_i} \frac{\delta_i(\rho)}{r} d\tau = \sum_{l=0}^k a_{il} \int_0^{\rho_i} \rho^l \rho d\rho \cdot \frac{3V_k}{R} = \frac{3V_k}{R} \sum_{l=0}^k \frac{a_{il} \cdot \rho_i^{l+2}}{l+2}.$$

Для  $i > 0$  сукупність формул можна записати у вигляді

$$U_{G_i}(P) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{f \cdot M_{G_j}}{R \cdot \rho} + \frac{3V_k}{R} f \sum_{l=0}^k \frac{a_{il}}{l+2} \left( \alpha_i^3 - \alpha_{i-1}^3 - \frac{\rho^{l+2}}{l+3} \left( \frac{1}{\alpha_i^{l+1}} - \frac{1}{\alpha_{i-1}^{l+1}} \right) \right), & P \in G_i, \\ \frac{fV_k}{R} \sum_{l=0}^k \sum_{j=i+1}^k \frac{a_{jl}}{l+2} (\rho_i^{l+2} - \rho_{i-1}^{l+2}), & P \in \bigcup_{j=1}^{i-1} G_j, \\ \sum_{j=0}^{i-1} \frac{f \cdot M_{G_j}}{R \cdot \rho}, & P \notin \bigcup_{j=1}^i G_j, \end{cases} \quad (15)$$

а коли  $i=0$  то матимемо

$$U_{G_0}(P) = \frac{V_k}{R} \left\{ 3 \sum_{l=0}^k \frac{a_{0l}}{l+2} \left( \alpha_0^3 - \frac{\rho^{l+2}}{l+3} \cdot \frac{1}{\alpha_0^{l+1}} \right) + \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^k \frac{a_{jl}}{l+2} \cdot \rho_i^{l+2} \right\}. \quad (16)$$

Підставляючи вирази (15), (16) в співвідношення (12) для енергії  $E$  отримаємо остаточну формулу, яку не приводимо (у зв'язку з громіздкістю).

Розглянемо конкретний приклад.

Знайти внутрішній потенціал  $U$  та енергію в середині одиничної кулі з  $\delta_m = \sqrt{\rho}$ .

За визначеними степеневими моментами  $M_{2k} = \frac{2}{4k+3}$  апроксимуємо функцію  $\delta_m$  рядом (5), із оптимальною кількістю членів, що дорівнює 50, для  $S_a = 0.499995$  (теоретичне значення

$$S_m = \int_0^1 \delta^2(\rho) d\rho = 0,5).$$

Далі визначаємо значення внутрішнього потенціалу  $U_a$  за формулами (5), (7), (15) та відповідні теоретичні значення

$$U_m = \frac{6}{5} \left( 1 - \frac{2}{7} \rho^{\frac{5}{2}} \right), \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Результати занесено в таблицю.

Порівняння теоретичних значень  $\delta_m, U_m$  і апроксимаційних  $\delta_a, U_a$

| $\rho$ | Значення густини |            | Значення потенціалу |           |
|--------|------------------|------------|---------------------|-----------|
|        | $\delta_a$       | $\delta_m$ | $U_a$               | $U_m$     |
| 0.0    | 0.0250072        | 0.0000000  | 1.2000000           | 1.2000000 |
| 0.1    | 0.3165041        | 0.3162278  | 1.1989159           | 1.1989158 |
| 0.2    | 0.4474749        | 0.4472136  | 1.1938671           | 1.1938668 |
| 0.3    | 0.5477847        | 0.5477226  | 1.1830990           | 1.1830988 |
| 0.4    | 0.6322026        | 0.6324555  | 1.1653050           | 1.1653053 |
| 0.5    | 0.7142857        | 0.7071068  | 1.1393911           | 1.1393908 |
| 0.6    | 0.7744211        | 0.7745967  | 1.1043927           | 1.1043926 |
| 0.7    | 0.8365385        | 0.8366600  | 1.0594409           | 1.0594411 |
| 0.8    | 0.8944955        | 0.8944272  | 1.0037372           | 1.0037371 |
| 0.9    | 0.9488155        | 0.9486833  | 0.9365372           | 0.9365371 |
| 1.0    | 1.0006086        | 1.0000000  | 0.8571429           | 0.8571429 |

Значення енергії за отриманою наближеною формулою буде  $E_a = 0,428568$ , а теоретичне –  $E_m = 0,428571$ .

**Висновки:** Отже, в неперервному випадку для кулі апроксимаційні формули добре відображають істинні значення, а тому можуть бути використані для обчислення величин  $U$  та  $E$ . Оскільки для еліпсоїдальної планети обчислення потенціалу  $U$  та енергії  $E$  за точними формулами можливе, але надзвичайно громіздке і фактично нездійсненне, тому отримані наближені співвідношення є практично єдиним апаратом визначення значень потенціалу  $U$  та енергії  $E$ .

1. Картвелишвили К.М. Планетарная плотностная модель и нормальное поле Земли.:М. Наука,1983,93с. 2. Мецераков Г.А. О среднем значении внутреннего гравитационного потенциала Земли. // Геодезия, картография и аерофотосъемка. – Львов, 1974. Вып. 19. – С.61-62. 3. Мецераков Г.А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. -1991,216 с. 4. Муратов Р.З. “Потенциалы эллипсоида”, Москва, Атомиздат, 1976, 144с. 5. Фис М., Заяць О., Фоца Р., Волос В. . Про один метод визначення потенціалу неоднорідної еліпсоїдальної планети. “Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва”, 2005 ст. 41-42. 6. Dziewonski A.M., Halls A.L., Lapwyyd E.R. Parametrically Simple Earth models, consistent geophysical data. -Phys. Planet. Inter.,10,1975,p.12-48. 7. Dziewonski

A.M., Anderson D.L. *Preliminary reference Earth model. – Physics of the Earth and Planet. Inter.*, 25, 1981, p.297-356.