УДК 528.1:519.246

Б. Пряха
Київський національний університет будівництва і архітектури

ПРО ЗВ'ЯЗОК ДИСПЕРСІЙ ТА КОВАРІАЦІЙ

Обґрунтовано дві теореми теорії точності вимірювань

Two theorem of the theory accuracy measurements are substantiated

Постановка проблеми. При розв'язанні актуальних завдань збереження і моніторингу довкілля, в тому числі ландшафтного середовища, приходиться мати справу з випадковими процесами. Оцінюючи стани випадкового процесу визначають нев'язки вимірів, досліджують дисперсії, коваріації випадкових величин.

Для будь-яких двох (не обов'язково незалежних) величин X, Y [1]:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X, Y) \tag{1}$$

(*закон додавання дисперсій*)

$$Cov(X, Y) = K_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(XY) - \mu_X \mu_Y \tag{2}$$

(*коваріації* X *і* Y).

Для опрацювання геодезичних, фотограмметричних вимірювань важливо виявити особливість дисперсій нев'язок вимірів, зв'язок дисперсій і коваріації системи випадкових величин.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У [2] обґрунтована така теорема:

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \tag{3}$$

де s^2, $s = \sqrt{s^2}$ – це відповідно вибіркова дисперсія та вибіркове стандартне відхилення [1]; $\bar{x}$ – вибіркове середнє; $\overline{x^2}$ – середнє значення квадратів показників сукупності вимірів.

У [3] встановлено, що вибірковому середньому $\bar{x}$ необхідно приписувати таке відхилення:

$$s_{\bar{x}} = \bar{s} = \sqrt{2}s, \tag{4}$$

де $\bar{s}$ називається середнім вибірковим стандартним відхиленням.

У [4] досліджені три класи випадкових величин. Множина $\{X_1, X_2, ..., X_n\}, n \geq 2$ величин називається колом K якщо

$$X_1 + X_2 + ... + X_n = C, \tag{5}$$

де C – абсолютна стала.

Колом L називається множина $\{X_1, X_2, ..., X_n\}, n \geq 2$, якщо елементи цієї множини мають таку властивість:

$$X_1 + X_2 + ... + X_n = \bar{Y}, \tag{6}$$

де $\bar{Y}$ – стала величина, середнє значення суми величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

Множина $\{X_1, X_2, ..., X_n\}, n \geq 3$ називається колом M, якщо на цій множині встановлюється:

1) порядок елементів і напрям їх обходу: $x_1 \to x_2 \to ... \to x_n \to x_1$;
2) правило відповідності

$$X_1 + X_2 + ... + X_n = 0. \tag{7}$$

Означення (5), (6), (7) відображають властивості множини вирівняних величин. Якщо ж $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ являє собою множину виміряних величин, тоді визначаються такі різниці:

$$f_K = X_1 + X_2 + ... + X_n - C;$$

$$f_L = X_1 + X_2 + \ldots + X_n - \bar{Y};$$
$$f_M = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \qquad (8)$$
які пропонується відповідно називати нев'язками кіл $K, L, M,$ або просто нев'язками вимірів.

Мета статті. Обґрунтувати дві теореми теорії точності вимірювань.

Виклад основного матеріалу дослідження. Дисперсія випадкової величини X визначається за такою теоремою [5]:
$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = \sum_{i=1}^{k_G} x_i^2 f(x_i) - \mu_X^2, \qquad (9)$$
де $E(X^2) = \sum_{i=1}^{k_G} x_i^2 f(x_i),$ тобто це математичне сподівання квадрата величини X; $\mu_X \equiv E(X) = \sum_{i=1}^{k_G} x_i f(x_i)$ – середнє значення; $f(x)$ – функція розподілу ймовірностей; k_G – обсяг повної групи значень величини X.

Т е о р е м а 1. *Дисперсія* σ_Y^2 *суми* $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі* $S_{(K)}$ *значень коваріаційної матриці системи цих величин:*
$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} Cov(X_i, X_j) = S_{(K)}. \qquad (10)$$
Д о в е д е н н я. Дисперсія суми $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ визначимо за правилом (9)
$$D(Y) = \sigma_Y^2 = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) =$$
$$= E[(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2] - [E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)]^2 =$$
$$= E(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_3 + \ldots + 2X_{n-1}X_n) - [E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)]^2 =$$
$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} X_i X_j\right) - \sum_{i=1}^{n}[E(X_i)]^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E(X_i)E(X_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \sum_{i=1}^{n}[E(X_i)]^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E(X_i X_j) - 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E(X_i)E(X_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\{E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}[E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} Cov(X_i, X_j).$$
Оскільки,
$$Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i), \qquad (11)$$
тому одержана сума дисперсій та подвійних коваріації являє собою алгебраїчну суму $S_{(K)}$ значень коваріаційної матриці системи випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Теорему доведено.

З теореми випливає два наслідки:

Н а с л і д о к 1. *Розсіювання нев'язок вимірів стосовно їх середнього значення виглядає так:*
$$s_f^2 = \sum_{i=1}^{n} s_{x_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \operatorname{cov}(x_i, x_j) = S_{(K)}, \qquad (12)$$
де s_f^2, $s_{x_i}^2$ – вибіркові дисперсії, визначені відповідно в сукупності нев'язок f і в сукупності результатів вимірювань x_i.

Справді, згідно з означеннями (8)
$$D(f_k) = D(f_L) = D(f_M) = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sigma_f^2 = \sigma_Y^2.$$
У звичайних сукупностях результатів вимірювань визначаються вибіркові дисперсії. Оцінкою дисперсії $\sigma_f^2 = \sigma_Y^2$ є вибіркова дисперсія s_f^2, що являє собою розсіювання нев'язок стосовно їх середнього значення. Тому від правила (10) приходимо до рівняння (12).

Н а с л і д о к 2. *Якщо сукупності* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *вимірів приведені до кола* K, *кола* L *або кола* M, *то рівняння зв'язку дисперсій та коваріації системи величин* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *виглядає так:*

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} s_{x_i}^2 + 2\sum\nolimits_{i=1}^{n-1}\sum\nolimits_{j=i+1}^{n} \operatorname{cov}(x_i, x_j) = S_{(K)} = 0. \tag{13}$$

Справді, якщо множина $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ вирівняних сукупностей вимірів являє собою коло K, коло L або коло M, тоді сума y величин $x_1, x_2, ..., x_n$ має нульову нев'язку. Тому і алгебраїчна сума $S_{(K)}$ значень коваріаційної матриці системи таких величин дорівнює нулю.

Є ще один зв'язок дисперсій і коваріації системи вирівняних величин.

Т е о р е м а 2. *Якщо величини $X_1, X_2, ..., X_n$ утворюють коло K, коло L або коло M, тоді алгебраїчна сума значень будь-якого стовпчика або рядка коваріаційної матриці системи таких величин дорівнює нулю.*

Д о в е д е н н я. Розглянемо коваріаційну матрицю системи випадкових величин

$$\begin{bmatrix} D(X_1) & Cov(X_1, X_2) & ... & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & D(X_2) & ... & Cov(X_2, X_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & ... & D(X_n) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Суми значень стовпчика, рядка матриці з номером i виглядають відповідно так: $D(X_i) + \sum\nolimits_{j:j\neq i} Cov(X_j, X_i)$; $D(X_i) + \sum\nolimits_{j:j\neq i} Cov(X_i, X_j)$.

Якщо величини утворюють коло K, то згідно з означенням (5), за правилом (2) одержимо:

$$\sum\nolimits_{j:j\neq i} Cov(X_j, X_i) = \sum\nolimits_{j:j\neq i} E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) =$$
$$= E[X_i(X_1 + X_2 + ... + X_{i-1} + X_{i+1} + ... + X_n)] -$$
$$- E(X_i)E(X_1 + X_2 + ... + X_{i-1} + X_{i+1} + ... + X_n) =$$
$$= E[X_i(C - X_i)] - E(X_i)E(C - X_i) =$$
$$= CE(X_i) - E(X_i^2) - CE(X_i) + E(X_i)E(X_i) =$$
$$= -[E(X^2) - E(X_i)E(X_i)] = -D(X_i). \tag{15}$$

Аналогічно приходимо до рівності (15) за означеннями (6), (7), тобто в тому випадку, коли множина випадкових величин являє собою коло L або коло M.

Використавши відповідність (11), від рівності (15) приходимо до рівняння звязку значень стовпчиків, рядків коваріаційної матриці (14):

$$D(X_i) + \sum\nolimits_{j:j\neq i} Cov(X_j, X_i) = D(X_i) + \sum\nolimits_{j:j\neq i} Cov(X_i, X_j) = 0. \tag{16}$$

Теорему доведено.

Вибіркове середнє $\bar{x}$, дисперсія s_x^2 − це оцінки відповідно величин $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = D(X)$ [6]. Отже, статистичними аналогами числових характеристик (2), (10), (16) відповідно є такі характеристики:

$$\operatorname{cov}(x_i, x_j) = K_{ij} = \overline{x_i x_j} - \bar{x}_i \bar{x}_j; \tag{17}$$

$$s_y^2 = \sum\nolimits_{i=1}^{n} s_{x_i}^2 + 2\sum\nolimits_{i=1}^{n-1}\sum\nolimits_{j=i+1}^{n} \operatorname{cov}(x_i, x_j). \tag{18}$$

$$s_{x_i}^2 + \sum\nolimits_{j:j\neq i} \operatorname{cov}(x_j, x_i) = s_{x_i}^2 + \sum\nolimits_{j:j\neq i} \operatorname{cov}(x_i, x_j) = 0. \tag{19}$$

П р и к л а д. В таблиці 1 відображені результати рівноточних спостережень (мм) за осіданням інженерної споруди [7]. Вони здійснені по шести маркам в періоди $t_1 = 0$, $t_2 = 0{,}5$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$, $t_5 = 3$, $t_6 = 5$, $t_7 = 9$, $t_8 = 12$ місяців.

Потрібно визначити загальні числові характеристики осідань споруди.

Таблиця 1

Результати спостережень за осіданням споруди

$x'_j(t)$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	y'_j
$x'_1(t)$	12,2	7,3	10,4	6,4	6,1	4,6	5,3	2,7	55,0
$x'_2(t)$	8,4	12,0	8,9	8,8	8,6	6,1	3,3	3,7	59,8
$x'_3(t)$	9,5	9,8	8,0	9,3	7,5	6,9	3,8	2,3	57,1
$x'_4(t)$	10,9	11,3	7,2	7,5	6,7	7,2	2,9	1,9	55,6
$x'_5(t)$	8,2	6,6	9,5	10,4	5,6	4,9	4,9	2,9	53,0
$x'_6(t)$	12,0	8,8	11,2	8,0	8,1	5,7	4,4	3,3	61,5
$\bar{x}'(t)$	10,2	9,3	9,2	8,4	7,1	5,9	4,1	2,8	$\bar{y}' = 57{,}0$

Суми y'_j висот окремих марок, що наведені в табл. 1 мають різні значення, тому множина сукупностей вимірів не утворює коло L. Множина відхилень окремих сум y'_j від їх середнього значення $\bar{y}'$ являє собою невязку кола L (мм):

$$f_L = y' - \bar{y}' = \begin{pmatrix} 55{,}0 \\ 59{,}8 \\ 57{,}1 \\ 55{,}6 \\ 53{,}0 \\ 61{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 57{,}0 \\ 57{,}0 \\ 57{,}0 \\ 57{,}0 \\ 57{,}0 \\ 57{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2{,}8 \\ 0{,}1 \\ -1{,}4 \\ -4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Перемноживши список (20) сам на себе, одержимо квадрат нев'язок (мм^2):

$$f_L^2 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2{,}8 \\ 0{,}1 \\ -1{,}4 \\ -4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2{,}8 \\ 0{,}1 \\ -1{,}4 \\ -4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7{,}84 \\ 0{,}01 \\ 1{,}96 \\ 16 \\ 20{,}25 \end{pmatrix}.$$

Визначимо вибіркову дисперсію нев'язок сум висот окремих марок (мм^2)

$$f_L^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} f_i^2 = \frac{1}{6}(4 + 7{,}84 + 0{,}01 + 1{,}96 + 16 + 20{,}25) = 8{,}34.$$

Обчислимо квадрат результатів спостережень першого періоду (мм^2)

$$\overline{x'(t_1)}^2 = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} x'_j(t_1) = \frac{1}{6}[(12{,}2)^2 + (8{,}4)^2 + (9{,}5)^2 + (10{,}9)^2 + (8{,}2)^2 + (12{,}0)^2] = 106{,}617.$$

Вибіркову дисперсію (мм^2) величини $x'(t_1)$ визначимо за теоремою (3)

$$s_{x'(t_1)}^2 = \overline{x'(t_1)}^2 - [\bar{x}'(t_1)]^2 = 106{,}617 - (10{,}2)^2 = 2{,}58.$$

Аналогічно були знайдені дисперсії результаттів спостережень проведених в інші періоди.

Обчислимо за формулою (17) коваріацію $x'(t_1)$ і $x'(t_2)$ (мм^2):

$$x'(t_1)x'(t_2) = \begin{pmatrix} 12{,}2 \\ 8{,}4 \\ 9{,}5 \\ 10{,}9 \\ 8{,}2 \\ 12{,}0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7{,}3 \\ 12{,}0 \\ 9{,}8 \\ 11{,}3 \\ 6{,}6 \\ 8{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89{,}06 \\ 100{,}8 \\ 93{,}1 \\ 123{,}17 \\ 54{,}12 \\ 105{,}6 \end{pmatrix};$$

$$\overline{x'(t_1)x'(t_2)} = \frac{1}{6}(89{,}06 + 108{,}8 + 93{,}1 + 123{,}17 + 54{,}12 + 105{,}6) = 94{,}31; \tag{21}$$

$$\bar{x}'(t_1)\bar{x}'(t_2) = (10{,}2)(9{,}3) = 94{,}86; \tag{22}$$

$$\operatorname{cov}[x'(t_1), x'(t_2)] = K'_{12} = \overline{x'(t_1)x'(t_2)} - \bar{x}'(t_1)\bar{x}'(t_2) = 94{,}31 - 94{,}86 = -0{,}55.$$

Аналогічно були визначені коваріації інших окремих пар величин $x'(t_i), x'(t_j)$, побудована коваріаційна матриця (мм^2) системи величин $x'(t_1), x'(t_2), ..., x'(t_8)$:

$$K' = \begin{bmatrix} s^2_{x'(t_1)} & K'_{12} & K'_{13} & K'_{14} & K'_{15} & K'_{16} & K'_{17} & K'_{18} \\ K'_{21} & s^2_{x'(t_2)} & K'_{23} & K'_{24} & K'_{25} & K'_{26} & K'_{27} & K'_{28} \\ K'_{31} & K'_{32} & s^2_{x'(t_3)} & K'_{34} & K'_{35} & K'_{36} & K'_{37} & K'_{38} \\ K'_{41} & K'_{42} & K'_{43} & s^2_{x'(t_4)} & K'_{45} & K'_{46} & K'_{47} & K'_{48} \\ K'_{51} & K'_{52} & K'_{53} & K'_{54} & s^2_{x'(t_5)} & K'_{56} & K'_{57} & K'_{58} \\ K'_{61} & K'_{62} & K'_{63} & K'_{64} & K'_{65} & s^2_{x'(t_6)} & K'_{67} & K'_{68} \\ K'_{71} & K'_{72} & K'_{73} & K'_{74} & K'_{75} & K'_{76} & s^2_{x'(t_7)} & K'_{77} \\ K'_{81} & K'_{82} & K'_{83} & K'_{84} & K'_{85} & K'_{86} & K'_{87} & s^2_{x'(t_8)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}58 & -0{,}55 & 0{,}90 & -1{,}78 & -0{,}07 & -0{,}18 & 0{,}35 & -0{,}23 \\ -0{,}55 & 3{,}85 & -1{,}60 & -0{,}24 & 1{,}5 & 1{,}50 & -1{,}57 & 0{,}01 \\ 0{,}90 & -1{,}60 & 1{,}84 & -0{,}33 & 0{,}03 & -1{,}02 & 0{,}88 & 0{,}50 \\ -1{,}78 & -0{,}24 & -0{,}33 & 1{,}66 & -0{,}01 & 0{,}08 & -0{,}07 & 0{,}15 \\ -0{,}07 & 1{,}5 & 0{,}03 & -0{,}01 & 1{,}14 & 0{,}46 & -0{,}49 & 0{,}32 \\ -0{,}18 & 1{,}50 & -1{,}02 & 0{,}08 & 0{,}46 & 0{,}91 & -0{,}74 & -0{,}26 \\ 0{,}35 & -1{,}57 & 0{,}88 & -0{,}07 & -0{,}49 & -0{,}74 & 0{,}72 & 0{,}10 \\ -0{,}23 & 0{,}01 & 0{,}50 & 0{,}15 & 0{,}32 & -0{,}26 & 0{,}10 & 0{,}36 \end{bmatrix}.$$

Контроль обчислень (мм^2) виконаємо за правилом (12)

$$S_{(K')} = \sum_{i=1}^{n} s^2_{x'_i} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} K'_{ij} = 13{,}06 + 2(-2{,}36) = 8{,}34 = s^2_{f_L}.$$

За формулою

$$r_{ij} = \frac{\operatorname{cov}(x_i, x_j)}{s_{x_i} s_{x_j}} \tag{23}$$

знайдені коефіцієнти кореляції, побудована кореляційна матриця:

$$r' = \begin{bmatrix} 1 & r'_{12} & r'_{13} & r'_{14} & r'_{15} & r'_{16} & r'_{17} & r'_{18} \\ r'_{21} & 1 & r'_{23} & r'_{24} & r'_{25} & r'_{26} & r'_{27} & r'_{28} \\ r'_{31} & r'_{32} & 1 & r'_{34} & r'_{35} & r'_{36} & r'_{37} & r'_{38} \\ r'_{41} & r'_{42} & r'_{43} & 1 & r'_{45} & r'_{46} & r'_{47} & r'_{48} \\ r'_{51} & r'_{52} & r'_{53} & r'_{54} & 1 & r'_{56} & r'_{57} & r'_{58} \\ r'_{61} & r'_{62} & r'_{63} & r'_{64} & r'_{65} & 1 & r'_{67} & r'_{68} \\ r'_{71} & r'_{72} & r'_{73} & r'_{74} & r'_{75} & r'_{76} & 1 & r'_{77} \\ r'_{81} & r'_{82} & r'_{83} & r'_{84} & r'_{85} & r'_{86} & r'_{87} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0{,}18 & 0{,}41 & -0{,}86 & -0{,}04 & -0{,}12 & 0{,}26 & -0{,}24 \\ -0{,}18 & 1 & -0{,}60 & -0{,}10 & 0{,}72 & 0{,}80 & -0{,}94 & 0{,}01 \\ 0{,}41 & -0{,}60 & 1 & -0{,}19 & 0{,}02 & -0{,}79 & 0{,}76 & 0{,}62 \\ -0{,}86 & -0{,}10 & -0{,}19 & 1 & -0{,}01 & 0{,}07 & -0{,}06 & 0{,}20 \\ -0{,}04 & 0{,}72 & 0{,}02 & -0{,}01 & 1 & 0{,}46 & -0{,}54 & 0{,}51 \\ -0{,}12 & 0{,}80 & -0{,}79 & 0{,}07 & 0{,}46 & 1 & -0{,}91 & -0{,}46 \\ 0{,}26 & -0{,}94 & 0{,}76 & -0{,}06 & -0{,}54 & -0{,}91 & 1 & 0{,}20 \\ -0{,}24 & 0{,}01 & 0{,}62 & 0{,}20 & 0{,}51 & -0{,}46 & 0{,}20 & 1 \end{bmatrix}.$$

Кореляційну матрицю характеризує алгебраїчна сума її значень:

$$S_{(r')} = (8)(1) + 2(-1) = 8 - 2 = 6.$$

Вирівняємо виміри за двома умовами П. Лапласа: алгебрачна сума поправок повинна дорівнювати нулю; сума абсолютних значень поправок повинна бути мінімальною.

Щоб задовольнити ці умови введемо в множину результатів вимірювань поправку (мм):

$$\vartheta = -f_L = \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}8 \\ -0{,}1 \\ 1{,}4 \\ 4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}.$$

Елементарні поправки (мм) були знайдені в відповідності з вагами результатів спостережень, представлені в табл. 2.

Таблиця 2

Поправки в висоти марок

$\vartheta(x_j)$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	$\sum\vartheta$
$\vartheta(x_1)$	0,4	1,0	0,2	0,2	0,1	0,1	0	0	2
$\vartheta(x_2)$	−0,6	−1,4	−0,3	−0,2	−0,1	−0,1	−0,1	0	−2,8
$\vartheta(x_3)$	0	−0,1	0	0	0	0	0	0	−0,1
$\vartheta(x_4)$	0,3	0,7	0,2	0,1	0,1	0	0	0	1,4
$\vartheta(x_5)$	0,9	2,0	0,4	0,4	0,2	0,1	0	0	4
$\vartheta(x_6)$	−1,0	−2,2	−0,5	−0,4	−0,2	−0,1	−0,1	0	−4,5
$\sum\vartheta$	0	0	0	0,1	0,1	0	−0,2	0	0

Вирівняні висоти (мм) марок представлені в табл. 3.

Таблиця 3

Вирівняні висоти марок

$x_j(t)$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	y_j
$x_1(t)$	12,6	8,3	10,6	6,6	6,2	4,7	5,3	2,7	57
$x_2(t)$	7,8	10,6	8,6	8,6	8,5	6,0	3,2	3,7	57
$x_3(t)$	9,5	9,7	8,0	9,3	7,5	6,9	3,8	2,3	57
$x_4(t)$	11,2	12,0	7,4	7,6	6,8	7,2	2,9	1,9	57
$x_5(t)$	9,1	8,6	9,9	10,8	5,8	5,0	4,9	2,9	57
$x_6(t)$	11,0	6,6	10,7	7,6	7,9	5,6	4,3	3,3	57
$\bar{x}(t)$	10,2	9,3	9,2	8,42	7,11	5,9	4,07	2,8	$\bar{y}=57$

Множина $\{x(t_1), x(t_2),..., x(t_8)\}$ вирівняних величин утворює коло L. Коваріаційна матриця (мм^2) системи вирівняних величин виглядає так:

$$K=\begin{bmatrix} s^2_{x(t_1)} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & s^2_{x(t_2)} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{31} & K_{32} & s^2_{x(t_3)} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & s^2_{x(t_4)} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & s^2_{x(t_5)} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & s^2_{x(t_6)} & K_{67} & K_{68} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & s^2_{x(t_7)} & K_{77} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & s^2_{x(t_8)} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2,48 & -0,75 & 0,71 & -1,58 & -0,67 & -0,30 & 0,56 & -0,45 \\ -0,75 & 2,99 & -2,01 & 0,12 & 0,14 & 1,11 & -1,14 & -0,46 \\ 0,71 & -2,01 & 1,63 & -0,30 & -0,29 & -1,06 & 0,93 & 0,39 \\ -1,58 & 0,12 & -0,30 & 1,85 & -0,21 & 0,02 & 0,02 & 0,08 \\ -0,67 & 0,14 & -0,29 & -0,21 & 0,89 & 0,36 & -0,50 & 0,28 \\ -0,30 & 1,11 & -1,06 & 0,02 & 0,36 & 0,84 & -0,69 & -0,28 \\ 0,56 & -1,14 & 0,93 & 0,02 & -0,50 & -0,69 & 0,74 & 0,08 \\ -0,45 & -0,46 & 0,39 & 0,08 & 0,28 & -0,28 & 0,08 & 0,36 \end{bmatrix}.$$

Оскільки, величини $x(t_1), x(t_2),..., x(t_8)$ утворюють коло L, тому алгебраїчна сума значень будь-якого стовпчика або рядка наведеної матриці дорівнює нулю. Отже, і загальна алгебраїчна сума (13) значень матриці є нульова:

$$S_{(K)}=\sum\nolimits_{i=1}^{n} s^2_{x_i} + 2\sum\nolimits_{i=1}^{n-1}\sum\nolimits_{j=i+1}^{n} K_{ij} = 11{,}78 + 2(-5{,}89) = 0.$$

Кореляційна матриця системи вирівняних величин має такий вигляд:

$$
r = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} & r_{17} & r_{18} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & r_{27} & r_{28} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & r_{34} & r_{35} & r_{36} & r_{37} & r_{38} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & 1 & r_{45} & r_{46} & r_{47} & r_{48} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & 1 & r_{56} & r_{57} & r_{58} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & 1 & r_{67} & r_{68} \\ r_{71} & r_{72} & r_{73} & r_{74} & r_{75} & r_{76} & 1 & r_{77} \\ r_{81} & r_{82} & r_{83} & r_{84} & r_{85} & r_{86} & r_{87} & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & -0{,}28 & 0{,}36 & -0{,}74 & -0{,}45 & -0{,}20 & 0{,}41 & -0{,}47 \\ -0{,}28 & 1 & -0{,}91 & -0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}70 & -0{,}76 & -0{,}45 \\ 0{,}36 & -0{,}91 & 1 & -0{,}17 & -0{,}24 & -0{,}91 & 0{,}85 & 0{,}52 \\ -0{,}74 & -0{,}05 & -0{,}17 & 1 & -0{,}16 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}10 \\ -0{,}45 & 0{,}08 & -0{,}24 & -0{,}16 & 1 & 0{,}42 & -0{,}61 & 0{,}50 \\ -0{,}20 & 0{,}70 & -0{,}91 & 0{,}02 & 0{,}42 & 1 & -0{,}88 & -0{,}52 \\ 0{,}41 & -0{,}76 & 0{,}85 & 0{,}02 & -0{,}61 & -0{,}88 & 1 & 0{,}16 \\ -0{,}47 & -0{,}45 & 0{,}52 & 0{,}10 & 0{,}50 & -0{,}52 & 0{,}16 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Алгебраїчна сума значень цієї матриці

$S_{(r)} = (1)(8) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} r_{ij} = 8 + 2(-3{,}66) = 0{,}68.$

За теоремою (4) припишемо середній висоті споруди $\bar{x}(t_1) = 10{,}2$ мм, що зафіксована в період спостережень $t_1 = 0$, таке середнє стандартне відхилення:

$$
s_{\bar{x}(t_1)} = \sqrt{2 s_{x(t_1)}^2} = \sqrt{(2)(2{,}48)} = 2{,}2 \text{ мм.}
$$

Аналогічно для інших станів споруди (мм):

$\bar{x}(t_2) = 9{,}3;$ $\bar{x}(t_3) = 9{,}2;$ $\bar{x}(t_4) = 8{,}42;$ $\bar{x}(t_5) = 7{,}11;$ $\bar{x}(t_6) = 5{,}9;$ $\bar{x}(t_7) = 4{,}07;$ $\bar{x}(t_8) = 2{,}8$

одержані такі відхилення (мм):

$s_{\bar{x}(t_2)} = 2{,}4;$ $s_{\bar{x}(t_3)} = 1{,}8;$ $s_{\bar{x}(t_4)} = 1{,}9;$ $s_{\bar{x}(t_5)} = 1{,}3;$ $s_{\bar{x}(t_6)} = 1{,}3;$ $s_{\bar{x}(t_7)} = 1{,}2;$ $s_{\bar{x}(t_8)} = 0{,}8.$

Знайдемо осідання споруди за час $t_{1.8} = t_8 - t_1 = 12$ місяців:

$$
\eta_{1.8} = \bar{x}(t_1) - \bar{x}(t_8) = 10{,}2 - 2{,}8 = 7{,}4 \text{ мм.}
$$

Вибіркову дисперсію цього осідання визначимо за правилом (18)

$$
s_{\eta_{1.8}}^2 = s_{x(t_1)}^2 + s_{x(t_8)}^2 + 2\operatorname{cov}[x(t_1), -x(t_8)] = s_{x(t_1)}^2 + s_{x(t_8)}^2 - 2\operatorname{cov}[x(t_1), x(t_8)] =
$$

$$
= s_{x(t_1)}^2 + s_{x(t_8)}^2 - 2K_{1.8} = 2{,}48 + 0{,}36 - 2(-0{,}45) = 3{,}74 \text{ мм}^2.
$$

Припишемо осіданню $\eta_{1.8}$ таке середнє стандартнее відхилення:

$$
\bar{s}_{\eta_{1.8}} = \sqrt{2 s_{\eta_{1.8}}^2} = \sqrt{(2)(3{,}74)} = 2{,}7 \text{ мм.}
$$

Висновки

1. Щоб знайти числові характеристики суми $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ випадкових величин досить знати сукупність значень величини Y.
2. З рівнянь (21), (22) виходить, що коваріація виникає внаслідок невизначеності результату перемножування двох сукупностей чисел.

3. Приведення вимірів до кола L дозволяє частково компенсувати випадкові похибки.

4. Відповідності (16), (19) – це рівняння звязку дисперсій та коваріацій вирівняних вимірів, множини значень яких утворюють кола K, L, M.

5. Достовірні числові характеристики розсіювання сум результатів вимірювань одержують за законами (1), (10) додавання дисперсій.

Перспективи подальших розвідок в цьому напрямку порлягають в дослідженні особливостей коефіцієнтів кореляції (23), кореляційних матриць систем випадкових величин.

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с. 2. Пряха Б., Білецький Р., Федьорко Я. Особливості вибіркових дисперсій // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2007. – Вип. 69. – С. 118-122. 3. Пряха Б. Оцінювання середніх значень // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, 2007 (I випуск): Зб. наук. праць. - Л. – С. 140-145. 4. Пряха Б.Г. До оцінки похибок вимірювань у геодезичних побудовах // Вісник геодезії та картографії. – 2002. - №4. С. 11-18. 5 Пряха Б.Г. Про числові характеристики результатів вимірювань // Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід. – Чернігів: ЧДІЕУ, 2008. – С. 97-108. 6. Пряха Б. Явні означення дисперсій σ^2, Σ^2 *// Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, 2008, випуск I(15): Зб. наук. праць – Л. – С 110-117. 7. Кузьменко И.Н., Полищук Ю.В., Шаповалова Л.А. Применение теории случайных функций в геодезии. – К.: Вища школа, 1980. – С.48.*