УДК 528.11

**Ю.Ф. Ткаченко, М.Р. Іващенко**
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

# ПРО ДЕЯКІ ІМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ ВИМІРІВ



***Розглянуті імовірнісні моделі випадкових, грубих помилок та їх композицій. Виведені формули розподілів і числових характеристик для відповідних моделей.***

***It is based on the mixed probability model of the distribution accidental and gross errors. The system of tolerances mentioned above allows to design and to make measurements with the highest reliability.***

**Постановка проблеми.** Проблема контролю вимірювального матеріалу від впливу грубих і систематичних помилок вимагає розробки математичних моделей, якими можна описувати сумісну дію випадкових, грубих і систематичних помилок. Найпоширенішою імовірнісною моделлю випадкових помилок є нормальний закон розподілу. Для аномальних результатів поширеною моделлю також є нормальний закон, але з іншими параметрами, ніж у випадкових помилок. У цій роботі запропоновані змішані імовірнісні моделі випадкових і грубих помилок, використання яких дає змогу обгрунтованіше розглядати питання урівнювання, призначення допусків та визначення надійності вимірів.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Нагромаджений за останні десятиліття досвід розроблення нових методів обробки інформації свідчить про необхідність вдосконалення алгоритмів оброблення, підвищення стійкості критеріїв якості і надійності їх функціонування, що вимагає розроблення і перевірки на практиці нових імовірнісних моделей, якими можна подавати реальні вимірювальні дані.

**Формування цілей роботи.** У роботі наведені найважливіші імовірнісні моделі випадкових величин, які надалі використані для опису випадкових і грубих помилок, а також їх сумісної дії.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо імовірнісні моделі випадкових величин, якими можна описувати випадкові і грубі помилки.

1. *Усічений розподіл*

Найпоширенішою моделлю випадкових помилок є нормальний закон. Відомо, що, якщо на випадкову величину під час вимірювань накладається обмеження вигляду $a<x<b$, то існує імовірнісна модель усіченого розподілу:

$$f_y(x)=\begin{cases} cf(x), & x\in(a,b) \\ 0, & x\notin(a,b), \end{cases}$$

де $c^{-1} = F(b) - F(a)$; $f(x)$, $F(x)$ – відповідно щільність і функція розподілу.

Якщо прийняти для вихідних випадкових помилок математичне сподівання $M(x)=0$ і дисперсія $D(x) = \sigma^2$, то для усічених випадкових помилок η відповідні числові характеристики дорівнюють

$$M(\eta)=0, \qquad D(\eta)=\sigma^2\left[1-\frac{t\varphi(t)}{\Phi_0(t)}\right]=a\sigma^2, \quad a\le 1,$$

де $t=x/\sigma$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{t^2}{2}\right\}$, $\Phi_0(t)$ – функція Лапласа. У таблиці наведені коефіцієнти *a* усічення дисперсії для значень параметра *t* в інтервалі (2–3), які можна використовувати для корекції середніх квадратичних помилок.

**Значення коефіцієнта *a* усічення дисперсії**

| *t* | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.6 | 2.8 | 3.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0.88 | 0.92 | 0.94 | 0.96 | 0.98 | 0.99 |

2. *Рівномірний розподіл*

Коли апріорної інформації про розподіл помилок вимірювань недостатньо, можливе використання імовірнісної моделі рівномірного розподілу. Відомо, що розподіл суми незалежних величин з рівномірного розподілу близьке до нормального вже при $n=3$.

Рівномірним розподілом зручно зображати грубі помилки, якщо вважати, що вони мають такі властивості:

– значення грубих помилок рівноімовірні;
– додатні і від’ємні грубі помилки рівноімовірні.

Друга властивість приводить до моделі подвійного рівномірного розподілу.

Для випадкових величин, які мають рівномірний розподіл в інтервалі *(a, b)*, щільність і числові характеристики дорівнюють

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}, \qquad (1)$$

$$M(x) = \frac{a+b}{2}; \qquad D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3. *Подвійний рівномірний розподіл*

Якщо ввести обмеження на величину помилки вигляду $|\xi| \rangle t\sigma$, то можлива така імовірнісна модель двобічних грубих помилок – подвійний рівномірний розподіл.

$$f_2(x) = \begin{cases} [2(b-a)]^{-1}, & x \in (-b,-a); \\ [2(b-a)]^{-1}, & x \in (a,b); \\ 0, & x \notin \{(-b,-a),(a,b)\}; \end{cases} \qquad (2)$$

$$M(x) = 0, \quad D(x) = \frac{1}{3}\left(b^2 + ab + a^2\right),$$

де $a=t_1\sigma$, $b=t_2\sigma$. Перевагою цієї моделі є те, що середня частина вибірки – інтервал (-a, a) відводиться для випадкових помилок.

4. *Дельта-функція*

Введемо поняття одиничної функції (функції Хевісайда)

$$e(x-\tau) = \begin{cases} 1, & x \ge \tau \\ 0, & x \langle \tau \end{cases}$$

Дельта-функція $\delta(x-\tau)$ є похідною одиничної функції

$$\delta(x-\tau)=\frac{de(x-\tau)}{dx}.$$

Припустимо, що ξ = *kσ* – однобічна груба помилка (*k* – кратність грубої помилки). Тоді імовірнісну модель для неї можна задати щільністю

$$f_3(x)=\delta(x-k\sigma). \tag{3}$$

Для двобічної грубої помилки $\xi=\pm k\sigma$, знак якої випадковий, відповідно щільність дорівнюватиме

$$f_y(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\delta(x-k\sigma), & x\geq 0\\ \frac{1}{2}\delta(x+k\sigma), & x\langle 0\end{cases} \tag{4}$$

Подання грубої помилки або параметра зсуву за допомогою $\delta$-функції можливо в композиції з випадковими величинами, які мають нормальний, рівномірний або інший неперервний розподіл.

Для визначення сумісної дії випадкових і грубих помилок з'єднують мішані імовірнісні моделі, які можна отримати через композицію законів розподілу випадкових і грубих помилок. Розглянемо деякі типові змішані моделі.

1. Композиція η випадкової ξ і однобічної грубої помилки дискретного типу $\xi_1$

$$\eta_1=\xi+\xi_1,$$

де $f_\xi(x)=\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{-1}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$; $\quad f_{\xi_1}(x)=\delta(x-k\sigma)$.

За теоремою згортки

$$f_{\eta_1}(x)=\left(f_\xi*\delta(x-k\sigma)\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(t)\delta(x-k\sigma-t)dt=f_\xi(x-k\sigma)=\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{-1}\exp\left\{-\frac{(x-k\sigma)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{5}$$

2. Композиція $\eta_2$ випадкової ξ і двобічної грубої помилки дискретного типу $\xi_2$

$$\eta_2=\xi+\xi_2,$$

де $f_{\xi_2}=\frac{1}{2}\delta(x\pm k\sigma)$.

За теоремою згортки маємо

при *x<0,*

$$f_{\eta_2}(x)=\left(f_\xi*\frac{1}{2}\delta_{-k}\right)(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(t)\delta(x+k\sigma-t)dt=\frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{-1}\exp\left\{-\frac{(x+k\sigma)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

при *x>0,*

$$f_{\eta_2}(x)=\left(f_\xi*\frac{1}{2}\delta_{-k}\right)(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(t)\delta(x-k\sigma-t)dt=\frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{-1}\exp\left\{-\frac{(x-k\sigma)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Тобто щільність випадкової величини $\eta_2$ дорівнює

$$f_{\eta_2}(x)=\begin{cases}\frac{c}{2}\cdot f_\xi(x+k\sigma), & x\leq 0\\ \frac{c}{2}\cdot f_\xi(x-k\sigma), & x\succ 0\end{cases} \tag{6}$$

Постійну с одержимо за умовою нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_\eta(x)dx=1,$$

звідки $c = \dfrac{1}{[\Phi_0(k) + 0{,}5]}$.

Остаточно отримуємо, що одна змішана модель описується щільністю (6).

3. Знайдемо композицію випадкової $\xi$ і грубої помилки неперервного типу $\xi_3$

$$\eta_3 = \xi + \xi_3,$$

де $f_{\xi_3}(x)$ задається формулою (2).

Далі маємо

при *x<0,*

$$f_{\eta_3}^{-}(x) = \left(f_\xi \cdot f_{\xi_3}^{-}\right)(x) = \frac{1}{2(b-a)}\int_{-b}^{-a} f_\xi(x+t)dt = \frac{1}{2(b-a)}\left[\Phi_0\left(\frac{x+b}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x+a}{\sigma}\right)\right];$$

при *x>0,*

$$f_{\eta_3}^{+}(x) = \left(f_\xi \cdot f_{\xi_3}^{+}\right)(x) = \frac{1}{2(b-a)}\int_{a}^{b} f_\xi(x-t)dt = \frac{1}{2(b-a)}\left[\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-b}{\sigma}\right)\right].$$

У результаті отримаємо, що сума випадкової і двобічної грубої помилки неперервного типу описується щільністю

$$f_{\xi_3}(x) = \begin{cases} c f_{\eta_3}^{-}(x), & x \le 0 \\ c f_{\eta_3}^{+}(x), & x \succ 0. \end{cases} \tag{7}$$

де $c^{-1} = \dfrac{1}{(b-a)}\displaystyle\int_0^\infty \left[\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-b}{\sigma}\right)\right]dx.$

4. Для моделі суми $\eta_4$ випадкової $\xi$ і грубої помилки $\xi_4$, яка має рівномірний розподіл (1)

$$\eta_4 = \xi + \xi_4,$$

виконавши аномальні перетворення, отримаємо

$$f_{\eta_4} = \frac{c}{(b-a)}\left[\Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x-b}{\sigma}\right)\right], \tag{8}$$

де константа $c^{-1} = \dfrac{1}{(b-a)}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left[\Phi_0 \frac{(x-a)}{\sigma} - \Phi_0 \frac{(x-b)}{\sigma}\right]dx.$

Розподіл (8) при *(b-a)≤ 2σ* можна апроксимувати нормальним розподілом $N\left(0, \sigma_{\eta_4}^2\right)$ з параметрами $M(\eta_4) = 0$, $D(\eta_4) = \sigma^2 + \dfrac{(b-a)^2}{3}$.

**Висновки.** 1. Запропоновані імовірнісні моделі грубих помилок і їх композицій з випадковими помилками. 2. Виведені аналітичні співвідношення для щільностей і числових характеристик дають можливість кількісно оцінювати надійність вимірювального матеріалу.

*1. Вентуель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988. – 480 с. 2. Іващенко М.Р., Ткаченко Ю.Ф. Про ефективність деяких критеріїв відбраковки // "Перспективи нарощування та збереження енергетичних ресурсів України"/ Збірн. наук. пр. – Івано-Франківськ, 2006. – С. 63–64. 3. Ткаченко Ю.Ф., Іващенко М.Р. Надійність геодезичних вимірів і обгрунтування допусків // "Геодезія, картографія і аерофотознімання" / Укр. міжв. наук.-техн. зб. – Львів, 2007. – С. 143–150.*