УДК 521.82

М.М. Фис
Національний університет “Львівська політехніка”

РОЗКЛАД ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ТРИВІСНОЇ ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ПЛАНЕТИ З ВИКОРИСТАННЯМ ОДНОГО КЛАСУ НЕОРТОГОНАЛЬНИХ ГАРМОНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Рассмотрено представление потенциала трехосного эллипсоида с помощью сходящихся рядов, коэффициенты которых определяются через интегральные характеристики функции распределения плотности планеты. Этот подход дает возможность в комплексе изучать распределение масс планеты, ее фигуру и внешнее гравитационное поле.

In this work is presented a potential of triaxial ellipsoid this help of converging rows. The koeficients which are determined integral descriptions of distributing function density of planet. This approach gives a possibility in a complex to study distributing of the masses of planet, its figure and its external gravity field.

Постановка проблеми. Потенціал сьогодні подається сумою кульових функцій, кількість членів якої сягає тисячі і більше [2]. Незважаючи на простоту, таке подання має свої недоліки. По-перше, виникає проблема збіжності біля поверхні планети, по-друге, велика кількість доданків значно збільшує час обчислень, а також їхні похибки, що можуть бути співвимірні з даними спостережень, чи навіть перевищувати їх.

Тривісний еліпсоїд є найточнішою апроксимацією фігури планети серед поверхнів другого порядку [1]. Його потенціал можна зобразити у вигляді ряду за раніше запропонованою системою спеціальних гармонійних функцій [3], який збіжний всюди, зокрема і на його поверхні. У роботі [12] наведено формули обчислення потенціалу (внутрішнього) для фігури обертання. Нижче подається алгоритм знаходження потенціалу тривісного еліпсоїда, які хоча є громіздкими, але неперервними у разі переходу через поверхню планети. Тому внутрішній потенціал, обчислений за деякою моделлю густини мас δ, можна трактувати як аналітичне продовження зовнішнього, одержаного за δ.

Зв’язок із важливими науковими та практичними завданнями. Обчислення потенціалу V тривісного планетарного еліпсоїда дозволяє проводити аналіз та інтерпретацію планетарних геодинамічних явищ. Порівняння значень V, отриманих різними способами, дає можливість оцінити вплив еліпсоїдальності на гравітаційне поле небесного тіла, а формули для V- визначити гравітаційну енергію E не тільки для кулі, а і для еліпсоїда. Результати, отримані в цій праці, можуть бути використані в дослідженнях, що проводяться в електромагнетизмі та квантовій механіці[4]. Формули, що представляють потенціал неоднорідної еліпсоїдальної планети можна застосувати в астрофізиці[13] для визначення фігур рівноваги .

Аналіз останніх досліджень та публікацій, в яких започатковано розв‘язання цієї проблеми. Для несферичних тіл важливим є використання систем функцій, відмінних від кульових, тому що вони адекватніше відтворюють його гравітаційне поле. Наприклад, у монографії [7] потенціал подається лінійною комбінацією функцій Ламе, їхнє застосування запропоновано для апроксимації гравітаційного поля Фобоса [8]. Розв’язок крайової задачі рівняння Лапласа для еліпсоїдів обертання наводиться в роботі [6]. Використання еліпсоїдальних функцій [7] дає, на відміну від кульових, для одних і тих самих порядків вищий ступінь деталізації. Неперервність потенціалу під час переходу через поверхню планети забезпечує єдиний підхід до вивчення його властивостей у ділянках біля поверхні.

Постановка завдання. Дослідження полягає в розробленні методики зображення гравітаційного потенціалу (внутрішнього і зовнішнього) тривісної еліпсоїдальної планети рядами, збіжними у всьому просторі.

Невирішені частини загальної проблеми Не розроблені алгоритми обчислення для функцій u_{mnk} різних порядків за допомогою рекурентних співвідношень, а також можливість повторного використання значень $M_{t_1t_2t_3}(\xi)$ для різних точок простору P(x, y, z).

Виклад основного матеріалу. Кусково-неперервну функцію розподілу мас $\delta(x, y, z)$ еліпсоїдної планети можна подати таким рядом [9]:

$$\delta(x, y, z) = \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} W_{mnk}(x, y, z), \tag{1}$$

де $\{\omega_{mnk}\}, \{W_{mnk}\}$ – дві біортогональні системи многочленів,
коефіцієнти якого визначаються

$$b_{mnk} = \int_\tau \omega_{mnk} \delta d\tau \Big/ \int_\tau \omega_{mnk} \cdot w_{mnk} d\tau, \tag{2}$$

Потенціал планети подається рівномірно збіжним рядом [10]

$$V = f \int_\tau \frac{\delta}{r} d\tau = f \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} \int_\tau \frac{W_{mnk}}{r} d\tau = f \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} u_{mnk}, \tag{3}$$

що гарантується збіжністю в середньому виразу (1) [10].

Система функцій $\{u_{mnk}\}$ подає потенціал довільної кусково-неперервної функції δ в еліпсоїді τ, а тому вона є повною. Для кожного фіксованого N=m+n+k лінійно незалежних функцій u_{mnk} поза тілом τ дорівнює $2N+1$,бо решта пов'язані рекурентними співвідношеннями[3] , що випливають з рівняння Лапласа $\Delta U_{mnk} \equiv 0$.

Для обчислення функцій u_{mnk} скористаємось формулою

$$u_{mnk} = \frac{1}{2^N m! n! k!} \cdot \frac{(-1)^N \partial^N}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k} \int_\tau \frac{(1-\rho^2)^N}{r} d\tau \tag{4}$$

та співвідношенням

$$u = \int_\tau \frac{(1-\rho^2)^N}{r} d\tau = \frac{\pi abc}{N+1} \int_{0,\xi}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(a^2+u)} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u}\right)^{N+1} \frac{du}{Q(u)}, \tag{5}$$

диференціювання якого дає

$$u_{mnk} = \frac{3N! V_e a^m b^n c^k}{2^{N+2} m! n! k!} \sum_{t=0}^{n+1} \frac{(-1)^t (2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{2^t (n+1-t)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2t_1-m} \left(\frac{y}{b}\right)^{2t_2-n} \left(\frac{z}{c}\right)^{2t_1-k} M_{t_1t_2t_3}(\xi) \tag{6}$$

$$M_{t_1t_2t_3}(\xi) = a^{2t_1} b^{2t_2} c^{2t_3} \int_{0,\xi}^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)^{t_1} (b^2+u)^{t_2} (c^2+u)^{t_3} Q(u)}. \tag{7}$$

Тут ξ – еліпсоїдальна координата, яка визначається з кубічного рівняння вигляду

$$\xi^3 + \xi^2 [a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2] + \xi [-a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + x^2 (c^2 + b^2) + y^2 (a^2 + c^2) +$$
$$+ z^2 (a^2 + b^2) + (x^2 b^2 c^2 + z^2 a^2 b^2 + y^2 a^2 c^2) - a^2 b^2 c^2 = 0.$$

Знайдемо $M_{t_1t_2t_3}(\xi)$ для тривісного еліпсоїда, користуючись розкладами в ряди підінтегральних функцій, для чого зробимо заміну (7)

$$z^2 = c^2 + u, \qquad z_0 = \sqrt{\xi^2 + u}, \qquad 2z dz = du$$

$$M_{t_1t_2t_3}=\frac{\beta^{2t_2}\gamma^{2t_3}}{a}\int\limits_{\sqrt{j^2+\zeta^2/a^2}}^{\infty}\frac{2dz}{(z/a)^{2t_3}((z/a)^2+e_1{}^2)^{2t_2+\frac{1}{2}}((z/a)^2+e_2{}^2)^{2t_2+\frac{1}{2}}}, \quad (8)$$

$$\beta=\frac{b}{a},\gamma=\frac{c}{a},e_1^2=1-\gamma^2,e_2^2=\beta^2-\gamma^2$$

Розкладемо функції $\dfrac{1}{((z/a)^2+e_1{}^2)^{2t_2+\frac{1}{2}}},\dfrac{1}{((z/a)^2+e_2{}^2)^{2t_2+\frac{1}{2}}}$ в ряди:

$$\frac{1}{((z/a)^2+e_1{}^2)^{2t_1+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{(z/a)^{2t_1+1}(t^2+\frac{e_1^2}{(z/a)^2})^{2t_1+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{(z/a)^{2t_1+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2t_2+2n-1)!!e_1^{2n}}{2^n n!(2t_2-1)!!(z/a)^{2t_1+2n+1}}; \quad (9)$$

і

$$\frac{1}{((z/a)^2+e_2{}^2)^{2t_2+\frac{1}{2}}}==\frac{1}{(z/a)^{2t_2+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2t_2+2n-1)!!e_2^{2n}}{2^n(2t_2-1)!!(z/a)^{2t_1+2n+1}}=\frac{C_0}{(z/a)^{2t_1+1}}+\sum\frac{C_n}{(z/a)^{2n+2t_1+1}}. \quad (10)$$

Ряди (7), (8) збігаються, тому що $\left|\dfrac{e_1}{(z/a)}\right|<1,\ \left|\dfrac{e_2}{(z/a)}\right|<1.$ (a>b>c)

Підінтегральний вираз є добутком двох рядів, елементи якого визначаються формулами:

$$a_0=\frac{c_0b_0}{(z/a)^{2t_1+2t_2+2}},a_1=\frac{1}{(z/a)^{2t_1+2t_2+2}}\left(\frac{c_1b_0+b_1c_0}{(z/a)^2}\right),\ldots,$$

$$a_n=\frac{1}{(z/a)^{2t_1+2t_2+2n+2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_mb_{m-i}\right) \quad (11)$$

З підстановки (9) в (6) одержимо

$$M_{t_1t_2t_3}=\frac{2\gamma^{2t_3}\beta^{2t_2}}{a}\int\limits_{\sqrt{\gamma^2+\zeta^2/a^2}}^{\infty}\left\{\frac{1}{(z/a)^{2t_1+2t_2+2t_3}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(z/a)^{2t_1+2t_2+2t_3+2n}}\right\}dz; \quad (12)$$

або

$$M_{t_1t_2t_3}=\frac{4\gamma^{2t_3}\beta^{2t_2}}{a}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{(2t_1+2t_2+2t_3+1)(\gamma^2+\zeta^2/a^2)^{\frac{2t_1+2t_2+2t_3+1}{2}}}\\+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(2t_1+2t_2+2t_3+2n+1)(\gamma^2+\zeta^2/a^2)^{\frac{2t_1+2t_2+2t_3+2n+1}{2}}}\end{array}\right\} \quad (13)$$

Стоксові сталі виражаються через коефіцієнти b_{mnk}

$$\left.\begin{array}{c}C_{nk}\\S_{nk}\end{array}\right\}=\sum_{p+q+s=t=0}^{\infty}\sum_{p'+q'+s'=n}\left.\begin{array}{c}\alpha_{p'q's'}\\\beta_{p'q's'}\end{array}\right\}\frac{b_{pqs}}{2^t p!q!s!}\int_{\tau}\frac{\partial^N\left(\rho^2-1\right)^N}{\partial x^p\partial y^q\partial z^s}x^{p'}y^{q'}z^{s'}d\tau, \quad (14)$$

причому при N=n доданок має вигляд

$$3V_e\sum_{p+q+s=n}\left.\begin{array}{c}\alpha_{pqs}\\\beta_{pqs}\end{array}\right\}\frac{b_{pqs}N!}{a^N\left(2N+3\right)!!}.. \quad (15)$$

Лінійно незалежних функцій u_{mnk} стільки само – скільки величин C_{nk}, S_{nk} Тому вибираємо значення b_{mnk} так:

$$\frac{b_{k,0,n-k}}{a^n}=\frac{\left(C_{nk}-C_{nk}^*\right)\delta_c\left(2n+3\right)!!}{3\cdot R\cdot n!\cdot 2^{n-k}\cdot(n-k)!}, \quad (16)$$

$$\frac{b_{k-1,1,n-k}}{a^n} = \frac{\left(S_{nk} - S_{nk}^*\right)\delta_c\left(2n+3\right)!!}{3\cdot R\cdot n!\cdot 2^{n-k}\cdot\left(n-k\right)!}, \tag{17}$$

$\frac{b_{pqs}}{a^n} = 0$, для всіх інших p, q, s.

Тут введені такі позначення:

$$\left.\begin{matrix} C_{nk}^* \\ S_{nk}^* \end{matrix}\right\} = \frac{3}{\delta_c}\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{p+q+s=n}^{t}\left.\begin{matrix}\alpha_{pqs}\\ \beta_{pqs}\end{matrix}\right\}\frac{p!q!s!\cdot b_{pqs}\cdot 2^t\left(n-t+1\right)!!a^{p'-p}b^{q'-q}c^{s'-s}}{p'!q'!s'!a^n\left(p'-p\right)!!\cdot\left(q'-q\right)!!\cdot\left(s'-s\right)!!\cdot\left(t+n+3\right)!!}., \tag{18}$$

де δ_c – середня густина планети.

Висновки. Система функцій u_{mnk} подає гравітаційне поле як ззовні, так і в середині еліпсоїда. Коефіцієнти розкладу b_{mnk} є лінійна комбінація сталих до N-го порядку включно, у зв’язку з чим зображення зовнішнього потенціалу за їх допомогою повніше ніж за кульовими функціями. Алгоритм обчислення виразів u_{mnk} легко програмується, і може бути використаний нарівні з еліпсоїдальними функціями для визначення потенціалу несферичних планет.

1. Бурша М. Трехосность Земли, Луны и Марса. Изучение Земли как планеты методами геодезии и геофизики : Тр. I Орловской конференции. – К.: Наук. думка, 1982. – с. 17–19. 2. Wentzel G. Ultra high degree geopotential models GPM 98A, GPM 98B and GPM 98C to degree 1800 // Report 98:4, Finnish Geodetic Institute, Masala, 1998, – P.71–80. 3. Фис М. М Про один клас не ортогональних для еліпсоїда гармонійних функцій. Збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТХК, вип.1(11), „Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва”. – Львів: Нац. ун-т “Львівська політехніка”. – с. 55–63. 4. Муратов Р.З. Потенциалы эллипсоида. – М.: Атомиздат, 1976. – 143с. 5. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: ИЛ 1953,–476с. 6. Мещеряков Г.А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. – М.: Наука, 1991, 216 с. 7. Антонов В. А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. – М.: Наука, Главная редакция ф.-м. Литературы, 1988. – 272 с. 8. Холшевников К. В. О представлении гравитационного поля Фобоса. Изучение Земли как планеты методами геофизики и геодезии. : Тр. III Орловской конференции. К.:: Наук. думка, 1982. – с. 94–95. 9. Мещеряков Г.А., Фыс М.М. Определение плотности земных недр рядами по биортогональным системам многочленов // Теория и методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. 1981. – С.329–334. 10. Фыс М.М О сходимости в среднем биортогональных внутри эллипсоида // Дифференциальные уравнения и их приложения Фыс. – Львов: 1983. – вып.172 – С.132–132. 11. Фис М.М., Зазуляк П.М., Заяць О. С. До питання визначення кульових функцій в загально планетарній системі координат / Зб. наук. пр. Західного геодезичного товариства“Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва ”. – 2004. – ст. 41–42. 12. Фис М., Заяць О., Фоца Р., Волос В. Про один метод визначення потенціалу неоднорідної еліпсоїдальної планети / Зб. наук. пр. Західного геодезичного товариства“Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва ”, 2005, – С. 41–42. 13. Чанрасекахар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. – М.: Мир, 1973. – 288 с.

Надійшла 06.04.2011 р.