УДК 621.395.74

Н.О. Князєва, О.Л. Нєнов
Одеська державна академія холоду

ОЦІНКА СТРУКТУРНОЇ НАДІЙНОСТІ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНОЇ МЕРЕЖІ

Представлено метод ймовірнісної оцінки структурної надійності телекомунікаційної мережі на основі урахування кількості вузлів і гілок, ймовірностей безвідмовної роботи гілок, значустостей пар вузлів, що тяжіють. В основу методу покладено обчислення загальної кількості шляхів заданого рангу або рангів в мережі. Проаналізовано застосовність методу в інженерній практиці.

Ключові слова: надійність, структура, мережа, телекомунікації, зв’язок, шлях, гілка, ймовірність.

The method of probabilistic estimation of TCN structural reliability on the basis of knots and branches numbers account, probabilities of faultless work of branches, importance of gravitating pairs of knots is presented. The calculation of common number of some rank or ranks ways in a network is found of method. The analysis of applicability of method in engineering practice is given.

Keywords: reliability, structure, network, telecommunications, connection, path, branch, probability.

Постановка проблеми. Сучасний стан науково-технічного прогресу в області інформаційних технологій можна охарактеризувати як глобальну інформаційну революцію. З кожним роком спостерігається лавиноподібний ріст кількості користувачів різних інформаційних мереж, а також послуг, що надаються цими мережами, що пояснюється значущістю інформаційного простору в усіх аспектах людської життєдіяльності. Розвиток інформаційних послуг, який спостерігається протягом усього періоду існування телекомунікаційної індустрії, відбувається за двома основними напрямами: поява принципово нових послуг і підвищення вимог до якості вже існуючих послуг. Зрозуміло, цей розвиток неможливий без удосконалення відповідної програмно-апаратної інфраструктури, основою якої є власне телекомунікаційні мережі.

Сучасні телекомунікаційні мережі являють собою різновид об’єктів технічного проектування і можуть створюватися з нуля або розвиватися на основі існуючих рішень. Незалежно від цього етапам технічної реалізації передує, як правило, етап моделювання з метою визначення тих чи інших параметрів мережі, важливе місце серед яких займає структурна надійність мережі. Оскільки надійність телекомунікаційної мережі з розгалуженою структурою безпосередньо пов’язана з результуючими показниками якості відповідних послуг, її оцінка – точна або приблизна – є одним з важливих етапів проектування і аналізу структури мережі.

Суть класичного поняття надійності визначається ДСТУ 2860-94 як властивість об’єкта зберігати протягом часу здатність виконувати потрібні функції у заданих режимах і умовах застосування. Надійність є комплексною властивістю, що залежно від призначення об’єкта і умов його застосування може містити в собі безвідмовність, довговічність, ремонтопридатність та збережуваність або певні сполучення цих властивостей [5]. Найважливішим і найширше використовуваним показником надійності є ймовірність безвідмовної роботи об’єкта.

Під структурною надійністю розуміють надійність, зумовлену структурою об’єкта, який аналізується або проектується. Показником структурної надійності об’єкта є ймовірність його безвідмовної роботи, яка розраховується на основі даних, що визначають структуру об’єкта. Для мережі зв’язку, представленої у вигляді сукупності вузлів і з’єднувальних їх гілок, яка задана матрицею зв'язності. До таких даних належить інформація про ймовірності безвідмовної роботи вузлів і гілок. У разі, коли вузли мережі вважають абсолютно надійними, структурна надійність мережі розраховується на основі ймовірностей безвідмовної роботи лише гілок.

Класичні методи дають змогу знайти аналітичне розв'язання задачі розрахунку надійності окремих зв'язків. На вищому рівні виникає задача оцінки структурної надійності мережі у комплексі як сукупності зв'язків, що реалізуються шляхами багатьох рангів. Така комплексна оцінка являє собою проблему, яка з об'єктивних причин не має тривіального вирішення.

Аналіз досліджень та публікацій. Граничні і точні оцінки структурної надійності зв'язків між парами вузлів, що тяжіють, були отримані ще у 70-х роках XX ст. [2]. Метод знаходження цих оцінок зводиться до відшукання множини шляхів між вузлами пари, що тяжіє, і визначення надійності кожного з них. Цей метод може бути застосований до зв'язків, утворених шляхами з порівняно невеликою кількістю вузлів (порядку 20). Сучасні телекомунікаційні мережі, однак, характеризуються більшою кількістю вузлів і зв'язків і нерідко містять підструктури, які явно не приводяться до паралельно-послідовних структур. Зі збільшенням кількості вузлів розрахунки точних оцінок можуть ставати доволі трудомісткими (складність зростає експоненційно) навіть під час використання сучасної обчислювальної техніки. Для зменшення складності обчислень замість точних оцінок знаходять верхню й нижню границі надійності.

Як один зі способів оцінки структурної надійності мережі в [6] запропоновано оцінювати її на підставі нормованих оцінок надійності усіх зв'язків мережі, зважених показниками важливості.

Боротьба з кількісною складністю оцінки структурної надійності дістала новий напрям з появою статистичного методу оцінки надійності і його аналітичних модифікацій. Задача статистичної оцінки надійності зв'язку ставиться як задача проведення статистичного експерименту на моделі мережі з відомою структурою [3; 4]. Моделювання набору станів вузлів здійснюється у випадковий спосіб на підставі відомої ймовірності безвідмовної роботи вузлів з метою знаходження хоча б одного шляху між вузлами пари, що тяжіє, для кожного такого набору. Використання цього методу дає змогу здебільшого істотно скоротити обсяг обчислень, необхідних для одержання оцінки із заданою точністю. Статистичний метод, однак, вимагає повторення розрахунків за кожної зміни структури мережі або ймовірностей безвідмовної роботи вузлів.

Формулювання мети статті. Існуючі методи оцінки структурної надійності мереж орієнтовані на застосування для мереж із заздалегідь відомою структурою, до того ж здебільшого лише для окремих їх частин. У той самий час на практиці у багатьох випадках виникає задача оцінки надійності мереж із заздалегідь відомою кількістю вузлів і гілок, але заздалегідь невідомою або не визначеною структурою. У таких випадках виникає необхідність у розробці методів оцінки надійності мережі загалом, а також окремих її зв'язків. Такі методи можуть також виявитися корисними і у разі оцінки надійності структурно складних мереж із заданою структурою, коли застосування відомих методів утруднене або неможливе. Розробку саме таких методів розглядає ця робота.

Виклад основного матеріалу. Постановка задачі оцінки структурної надійності мережі. Розглядатимемо традиційну модель телекомунікаційної мережі, подану у вигляді множини вузлів N, що моделюють пункти передачі інформації в мережі, $|\mathrm{N}| = n$, і множини гілок L, що моделюють прямі зв'язки, що з'єднують пари вузлів, $|\mathrm{L}| = L$. Кожна пара вузлів у неорієнтованій мережі з'єднана однією гілкою (двонаправленим шляхом рангу 1). Кожна пара вузлів в орієнтованій мережі може бути з'єднана однією направленою гілкою або двома різнонаправленими гілками. Саму множину L може бути не задано, тоді враховується лише її потужність L. У цьому разі ймовірність безвідмовної роботи задається не для кожної гілки окремо, а для усіх гілок загалом, тобто вважається однаковою для усіх гілок.

Додаткова інформація, що може бути задана і врахована: максимальний ранг розглянутих шляхів передачі інформації; множина пар вузлів, що тяжіють; матриця ваг пар вузлів, що тяжіють, яка відображає їхню значущість (важливість).

Отже, у загальному випадку набір вихідних даних такий:

- n – кількість вузлів мережі;
- L – кількість гілок мережі;
- P – матриця ймовірностей безвідмовної роботи гілок; $P = [p_{xy}]$ (p_{xy} – ймовірність безвідмовної роботи гілки між довільними вузлами x і y; $x, y = \overline{1, n}$; $x \neq y$);
- R – найбільший ранг розглянутих шляхів передачі інформації;
- $\mathbf{\Phi}$ – множина пар вузлів, що тяжіють (зв'язків); $\mathbf{\Phi} = \{f_{ij}\}$ (f_{ij} – пара вузлів i–j); t – кількість пар вузлів, що тяжіють (зв'язків);
- Z – матриця вагових характеристик значущості (важливості) пар вузлів, що тяжіють; $Z = [z_{ij}]$ (z_{ij} – значущість зв'язку i–j);
- вузли мережі вважаються абсолютно надійними.

Необхідно отримати спосіб кількісної оцінки структурної надійності довільного зв'язку й мережі загалом на основі вищеперерахованих вихідних даних, тобто знаходження кількісного показника, який виражено через вищеперераховані вихідні дані.

Аналітичне розв'язання задачі оцінки структурної надійності мережі. Функцією шляху, що зв'язує пару вузлів, є виконання заявок на передачу інформації від вузла-джерела до вузла-приймача. У простій моделі розглядаються тільки два стани кожної гілки: справний (безвідмовна робота) і несправний (відмова). При цьому ймовірність безвідмовної роботи гілки вважається заданою, а вузли – абсолютно надійними. Ймовірність безвідмовної роботи гілки виступає в розглянутій моделі показником надійності гілки. Показником надійності зв'язку між парою вузлів у цьому разі є ймовірність виконання заявки, тобто доставки інформації з вузла-джерела у вузол-приймач. Ймовірність виконання заявки по суті відповідає ймовірності безвідмовної роботи зв'язку. Зв'язок представлений сукупністю шляхів (загалом надлишкової) з вузла-джерела у вузол-приймач. Отже, структурна надійність зв'язку або мережі безпосередньо залежить від кількості шляхів, що забезпечують зв'язок.

Розглядаючи мережу в деякий момент часу, можна вважати гілки, що відмовили, відсутніми в її структурі й розглядати лише множину справних гілок і справних шляхів, утворених цими гілками. Оцінка кількості справних гілок може ґрунтуватися на різних чинниках; у цій задачі вважатимемо кількість справних гілок заданою. Зв'язок між парою вузлів, що тяжіють, забезпечується шляхами, отже, для точної оцінки структурної надійності зв'язку необхідно визначити кількість незалежних для цього зв'язку шляхів, тобто шляхів, які включені паралельно і не мають спільних гілок. Розглядатимемо усі існуючі шляхи між парою вузлів як квазінезалежні – таке допущення природне під час використання комутації пакетів. Пошук усіх альтернативних шляхів, що реалізують зв'язок рангу, не більшого за R, і розгляд їх як незалежних для цього зв'язку дасть верхню границю надійності зв'язку між вузлами [2]. Пошук усіх альтернативних шляхів рангу, не більшого за R, і розгляд їх як незалежних у межах кожного окремого зв'язку для усіх пар вузлів мережі, що тяжіють, дасть у підсумку комплексну оцінку структурної надійності мережі.

Знайдемо залежність між кількістю справних гілок у мережі і кількістю шляхів рангом, не більшим за R.

Розглянемо для початку повнозв'язну мережу із кількістю вузлів n і обмеженнями на структуру, вказаними вище. Отримаємо залежності для знаходження кількості шляхів рангу від 1 до R для одного зв'язку і для мережі загалом.

Як у неорієнтованій, так і в орієнтованій повнозв'язній мережі кількість m шляхів деякого рангу r ($r = \overline{1, R}$) між вузлами однієї пари i-j, що тяжіють, тобто шляхів, які утворюють один зв'язок, визначиться як кількість розміщень із (n – 2) елементів по r штук:

$$m_{r\,ij} = \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}. \tag{1}$$

Кількість шляхів рангу, не більших від R, які реалізують один зв'язок:

$$m_{1..R\,ij} = \sum_{r=1}^{R} \mathrm{A}_{n-2}^{r-1} . \tag{2}$$

Для оцінки структурної надійності мережі отримаємо формули обчислення кількості шляхів в усій мережі. У неорієнтованій мережі пари вузлів ab і ba являють собою фактично ту саму пару; в орієнтованій мережі – це дві різні пари. Отже, для неорієнтованої мережі кількість таких пар визначатиметься кількістю сполучень вузлів: C_n^2, а для орієнтованої – кількістю розміщень: A_n^2. Отже, кількості шляхів рангу r ($M_{r\,\text{н}}$) і рангів від 1 до R ($M_{1..R\,\text{н}}$) в неорієнтованій мережі:

$$M_{r\,\text{н}} = \mathrm{C}_n^2 \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}, \quad M_{1..R\,\text{н}} = \mathrm{C}_n^2 \sum_{r=1}^{R} \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}, \tag{3}$$

в орієнтованій мережі відповідно:

$$M_{r\,\text{о}} = \mathrm{A}_n^2 \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}, \quad M_{1..R\,\text{о}} = \mathrm{A}_n^2 \sum_{r=1}^{R} \mathrm{A}_{n-2}^{r-1} . \tag{4}$$

Загальна кількість шляхів усіх можливих рангів (від 1 до $R_{\max} = n - 1$) в неорієнтованій мережі:

$$M_{\Sigma\,\text{н}} = \mathrm{C}_n^2 \sum_{r=1}^{n-1} \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}, \tag{5}$$

в орієнтованій мережі:

$$M_{\Sigma\,\text{о}} = \mathrm{A}_n^2 \sum_{r=1}^{n-1} \mathrm{A}_{n-2}^{r-1} . \tag{6}$$

Отримані формули можна спростити, використовуючи властивості біноміальних коефіцієнтів: $\mathrm{C}_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$; $\mathrm{A}_n^2 = n(n-1)$. Отже, в неорієнтованій мережі:

$$M_{r\,\text{н}} = \frac{n(n-1)}{2} \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}, \quad M_{1..R\,\text{н}} = \frac{n(n-1)}{2} \sum_{r=1}^{R} \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}, \tag{7}$$

в орієнтованій мережі:

$$M_{r\,\text{о}} = n(n-1) \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}, \quad M_{1..R\,\text{о}} = n(n-1) \sum_{r=1}^{R} \mathrm{A}_{n-2}^{r-1} . \tag{8}$$

Вирази (7)–(8) дають змогу отримати оцінкові показники структурної надійності як ймовірності безвідмовної роботи повнозв'язної мережі. На практиці, однак, часто доводиться мати справу з неповнозв'язними мережами, тому вирази для визначення показників надійності отримаємо далі для мережі довільної зв'язності (з довільною кількістю гілок).

Для переходу від повнозв'язної мережі до мережі довільної зв'язності знайдемо співвідношення, що уможливлюють знайти загальну кількість шляхів у мережі за відомої кількості гілок мережі. Для цього знайдемо: у побудові скількох шляхів деякого заданого рангу r бере участь одна гілка у повнозв'язній мережі із кількістю вузлів n? Цю кількість шляхів позначатимемо як m_r. Вивід загальної формули для довільного рангу зробимо шляхом узагальнення багатьох окремих випадків для всезростаючих рангів, використовуючи процедуру, яка складається з таких ітерацій:

Ітерація 1. Одна довільно обрана гілка бере участь у побудові одного шляху рангу 1; кількість таких шляхів $m_1 = 1$. Назвемо цю гілку базовою.

Ітерація 2. Від одного кінця однієї гілки, тобто шляху рангу 1, можна будувати кілька шляхів рангу 2 додаванням другої гілки. Ця кількість дорівнює кількості вільних вузлів мережі (тобто які не примикають до гілки): n – 2. Для обох кінців вихідної гілки отримаємо кількість шляхів рангу 2:

$$m_2 = 2(n-2). \tag{9}$$

В отриманих шляхах рангу 2 одна вершина базової гілки з'єднана із другою гілкою шляху (має ступінь 2), а друга вершина є кінцевим вузлом (має ступінь 1). Далі говоритимемо за такого розташування базової гілки про те, що вона є крайньою у цьому шляху.

Ітерація 3. Від одного кінця одного шляху рангу 2 можна добудувати стільки шляхів рангу 3, скільки вузлів у мережі є вільними, тобто не введеними в шляхи на попередніх ітераціях: $n – 3$. Для одного кінця вихідного шляху рангу 2 отримаємо: $n – 3$, а для обох кінців – $2(n – 3)$. Якщо ж ми в такий спосіб отримаємо множину шляхів рангу 3 на основі усіх отриманих на попередній ітерації шляхів рангу 2, виявиться, що елементи цієї множини не унікальні, тобто у ній будуть присутні пари повторюваних, ідентичних один одному, шляхів рангу 3. Серед повторюваних виявляться ті шляхи рангу 3, у яких базова гілка не є крайньою (тобто один з вузлів базової гілки не з'єднаний з іншими гілками розглянутого шляху). Повтор виникає тоді, коли деяка гілка, що добудовується до шляху рангу 2 на ітерації 3, виявляється вже добудованою до шляху рангу 1 на ітерації 2. Кількість унікальних шляхів, у яких базова гілка є крайньою, можна розглядати як нижню границю шуканої кількості шляхів (позначимо як $m_{r(\text{н})}$). Загальна ж кількість неунікальних шляхів рангу r, що містять базову гілку, і побудованих на основі множини унікальних (неповторюваних) шляхів рангу $(r – 1)$, можна розглядати як верхню границю шуканої кількості шляхів (позначимо, як $m_{r(\text{в})}$).

Виведемо формулу для обчислення нижньої границі кількості шляхів рангу r, побудованих на основі базової гілки, вважаючи нижню границю кількості шляхів рангу $(r – 1)$ відомою. Для $r = 3$ маємо кількість шляхів:

$$m_{3(\text{н})} = m_2\,(n – 3) = 2(n – 2)(n – 3),$$

для $r = 4$:

$$m_{4(\text{н})} = m_{3(\text{н})}\,(n – 4) = 2(n – 2)(n – 3)(n – 4),$$

для довільного r:

$$m_{r(\text{н})} = m_{(r-1)(\text{н})}\,(n – r) = 2(n – 2)(n – 3)(n – 4)\cdot\ldots\cdot(n – r + 1)(n – r) = 2\frac{(n-2)!}{(n-r-1)!}. \tag{10}$$

З огляду на те, що $C_{n-2}^{r-1} = \dfrac{(n-2)!}{(r-1)!\cdot((n-2)-(r-1))!} = \dfrac{(n-2)!}{(r-1)!\cdot(n-r-1)!}$, можна записати формулу (10) у вигляді

$$m_{r(\text{н})} = 2(r-1)!\,C_{n-2}^{r-1}. \tag{11}$$

Запишемо формулу для обчислення верхньої границі кількості шляхів рангу r, побудованих на основі базової гілки, вважаючи кількість унікальних шляхів рангу $(r – 1)$ відомою:

$$m_{r(\text{в})} = m_{r-1}\cdot 2(n – r). \tag{12}$$

Для отримання виразу для точної кількості шляхів рангу r, побудованих на основі базової гілки, оцінимо кількість повторюваних шляхів серед множини шляхів, отриману для верхньої границі. Розглянемо такі множини шляхів:

A – множина унікальних шляхів рангу r із крайньою базовою гілкою (тобто шляхів, у яких одна з вершин базової гілки має ступінь 1); потужність множини **A** дорівнює нижній границі кількості шляхів рангу r: $|\mathbf{A}| = m_{r(\text{н})}$;

C – повна множина шляхів рангу r, отримана добудовуванням до унікальних шляхів рангу $(r – 1)$ однієї гілки з будь-якого боку; у множині **C** не всі шляхи є унікальними; потужність множини **C** в такий спосіб дорівнює верхній границі кількості шляхів рангу r, обчисленої вищевказаним способом: $|\mathbf{C}| = m_{r\text{в}}$; множина **C** містить у собі множину **A**: $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$;

B – множина шляхів, отримана вирахуванням з повної множини **C** її підмножини **A**: $\mathbf{B} = \mathbf{C} – \mathbf{A}$, $|\mathbf{B}| = |\mathbf{C}| – |\mathbf{A}| = m_{r(\text{в})} – m_{r(\text{н})}$; множина **B** в такий спосіб складається зі шляхів рангу r, у яких базова гілка не є крайньою (тобто одна з її вершин має ступінь 1); як показано далі, множина **B** не містить унікальних шляхів.

Крайня гілка (кожна з двох) усякого шляху з множини **B** може бути добудована до шляху рангу $(r – 1)$ двома способами: на останній ітерації переходу від рангу $(r – 1)$ до рангу r або на передостанній ітерації одержання множини шляхів рангу $(r – 1)$. Отже, в отриманій множині **B** для кожного шляху, отриманого першим способом, є його копія, добудована другим способом. Із цього випливає, що унікальних шляхів у множині **B** у 2 рази менше, ніж усього шляхів у множині **B**. Звідси випливає, що унікальних шляхів у загальній множині **C**:

$$m_r = |\mathbf{A}| + \frac{|\mathbf{B}|}{2} = m_{r(\text{н})} + \frac{m_{r(\text{в})} - m_{r(\text{н})}}{2} = \frac{m_{r(\text{н})} + m_{r(\text{в})}}{2} = (r-1)!\ \mathrm{C}_{n-2}^{r-1} + m_{r-1}\,(n-r). \tag{13}$$

Для обчислення кількості неповторюваних шляхів рангу r за формулою (13) необхідно знати кількість неповторюваних шляхів рангу (r – 1), побудованих на основі базової гілки – m_{r-1}. Користуючись тим, що кількість неповторюваних шляхів рангу 2, які побудовані на основі базової гілки, відома, можна обчислити кількість неповторюваних шляхів довільного рангу ітераційно (на основі m_2 обчислити m_3, на основі m_3 обчислити m_4 тощо).

Загальна кількість шляхів рангу не більше за R, побудованих на основі заданої (базової) гілки:

$$m_{1..R} = \sum_{r=1}^{R} m_r\ . \tag{14}$$

Цю множину неповторюваних шляхів позначимо через **D**. Множину всіх шляхів, побудованих на основі базової гілки, позначимо через **E**. Тоді $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$.

Отже, отримано спосіб (вирази (13)–(14)) обчислення кількості шляхів рангу не більше за R, у які входить деяка задана гілка. Видалення цієї гілки призводить до вилучення всіх цих шляхів з мережі. Цей спосіб дає можливість визначити загальну кількість шляхів у неповнозв’язній мережі, яка утворюється під час видалення однієї гілки з повнозв’язної мережі, а також ймовірність зникнення довільно взятого шляху під час видалення деякої однієї гілки.

Ймовірність події S_1 ($\mathrm{P}(S_{1(R)})_н$), яка полягає у тому, що деякий довільно взятий шлях перестане існувати під час видалення однієї довільно взятої гілки, визначиться як відношення кількості шляхів відповідного рангу, в утворенні яких бере участь ця гілка, до загальної кількості шляхів відповідного рангу у мережі [1]. Під час розгляду шляхів деякого заданого рангу r, а також множини шляхів рангу не більше за R в неорієнтованій повнозв’язній мережі ця ймовірність визначиться як

$$\mathrm{P}\left(S_{1(r)\text{н}}\right) = p_{1\text{н}(r)} = \frac{m_r}{M_{r\ \text{н}}} = \frac{m_r}{\mathrm{C}_n^2 \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}}, \quad \mathrm{P}\left(S_{1(1..R)\text{н}}\right) = p_{1\text{н}(1..R)} = \frac{m_{1..R}}{M_{1..R\ \text{н}}} = \frac{m_{1..R}}{\mathrm{C}_n^2 \sum_{r=1}^{R} \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}}; \tag{15}$$

в орієнтованій повнозв’язній мережі:

$$\mathrm{P}\left(S_{1(r)\text{o}}\right) = p_{1\text{o}(r)} = \frac{m_r}{M_{r\ \text{o}}} = \frac{m_r}{\mathrm{A}_n^2 \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}}, \quad \mathrm{P}\left(S_{1(1..R)\text{o}}\right) = p_{1\text{o}(1..R)} = \frac{m_{1..R}}{M_{1..R\text{o}}} = \frac{m_{1..R}}{\mathrm{A}_n^2 \sum_{r=1}^{R} \mathrm{A}_{n-2}^{r-1}}. \tag{16}$$

Ймовірність складної події, яка полягає у тому, що цей шлях перестає існувати під час видалення l гілок мережі, визначимо як ймовірність суми l спільних подій S_1, що відповідають видаленню кожної гілки з l обраних:

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{l} S_{1(r)}\right) = \sum_{s=1}^{l} (-1)^{s-1} \mathrm{C}_l^s \left(p_{1(r)}\right)^s, \quad \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{l} S_{1(1..R)}\right) = \sum_{s=1}^{l} (-1)^{s-1} \mathrm{C}_l^s \left(p_{1(1..R)}\right)^s. \tag{17}$$

Ймовірність події, що полягає у тому, що деякий шлях (незалежно від його рангу) залишається в мережі під час видалення l гілок, визначиться як ймовірність протилежної події:

$$\mathrm{P}\left(\overline{\sum_{i=1}^{l} S_{1(r)}}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{l} S_{1(r)}\right). \tag{18}$$

Використовуючи розкладання бінома Ньютона, вираз (18) можна подати у такому вигляді:

$$\mathrm{P}\left(\overline{\sum_{i=1}^{l} S_{1(r)}}\right) = \left(1 - p_{1(r)}\right)^l, \quad \mathrm{P}\left(\overline{\sum_{i=1}^{l} S_{1(1..R)}}\right) = \left(1 - p_{1(1..R)}\right)^l. \tag{19}$$

Кількість шляхів рангу r, а також кількість шляхів рангу не більше за R, які залишаються під час видалення з повнозв'язної мережі l гілок, – $M_{r\text{ зал}}$ і $M_{1..R\text{ зал}}$ – визначаться в такий спосіб:

$$M_{r\text{ зал}} = M_r\left(1 - p_{1(r)}\right)^l, \quad M_{1..R\text{ зал}} = M_{1..R}\left(1 - p_{1(1..R)}\right)^l. \qquad (20)$$

Підставивши вирази (3)–(4) і (15)–(16) у формули (20), визначення кількості шляхів рангу r і рангу не більше за R, які залишаються в мережі, можна записати для неорієнтованої і орієнтованої мережі відповідно:

$$M_{r\text{ зал. н}} = \frac{n(n-1)}{2} C_{n-2}^{r-1}\left(1 - \frac{2m_r}{n(n-1)A_{n-2}^{r-1}}\right)^l, \quad M_{1..R\text{ зал. н}} = \frac{n(n-1)}{2} C_{n-2}^{r-1}\left(1 - \frac{2m_{1..R}}{n(n-1)\sum_{r=1}^{R} A_{n-2}^{r-1}}\right)^l; \qquad (21)$$

$$M_{r\text{ зал. о}} = n(n-1) C_{n-2}^{r-1}\left(1 - \frac{m_r}{n(n-1)A_{n-2}^{r-1}}\right)^l, \quad M_{1..R\text{ зал. о}} = n(n-1) C_{n-2}^{r-1}\left(1 - \frac{m_{1..R}}{n(n-1)\sum_{r=1}^{R} A_{n-2}^{r-1}}\right)^l. \qquad (22)$$

Нормовані графіки залежності відношення $M_{\text{зал. н}} / M_{\Sigma\text{ н}}$ як функції від відношення $L / L_{\max}$, де $M_{\text{зал. н}} = M_{1..R\text{ зал. н}}$ при $R = R_{\max} = n - 1$, $L_{\max}$ – кількість гілок у повнозв'язній мережі з n вузлами для різних значень n у рівномірній і логарифмічній шкалах показані на рис. 1 і 2.

Отже, отримані вирази для визначення загальної кількості шляхів $M_{r\text{ зал}}$ і $M_{1..R\text{ зал}}$, які є ключовими в оцінці структурної надійності мереж довільної зв'язності.

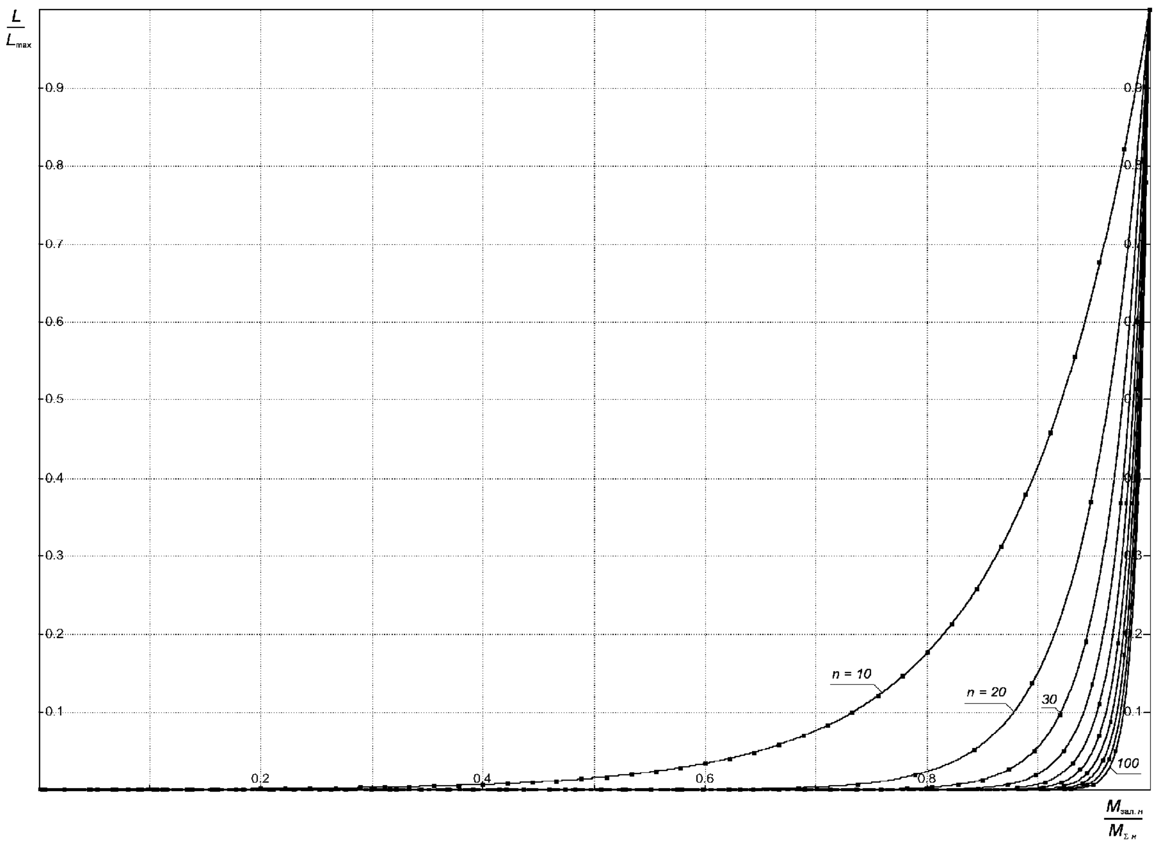

Рис. 1. Нормований графік залежності кількості шляхів усіх рангів від кількості гілок у мережі у рівномірній шкалі

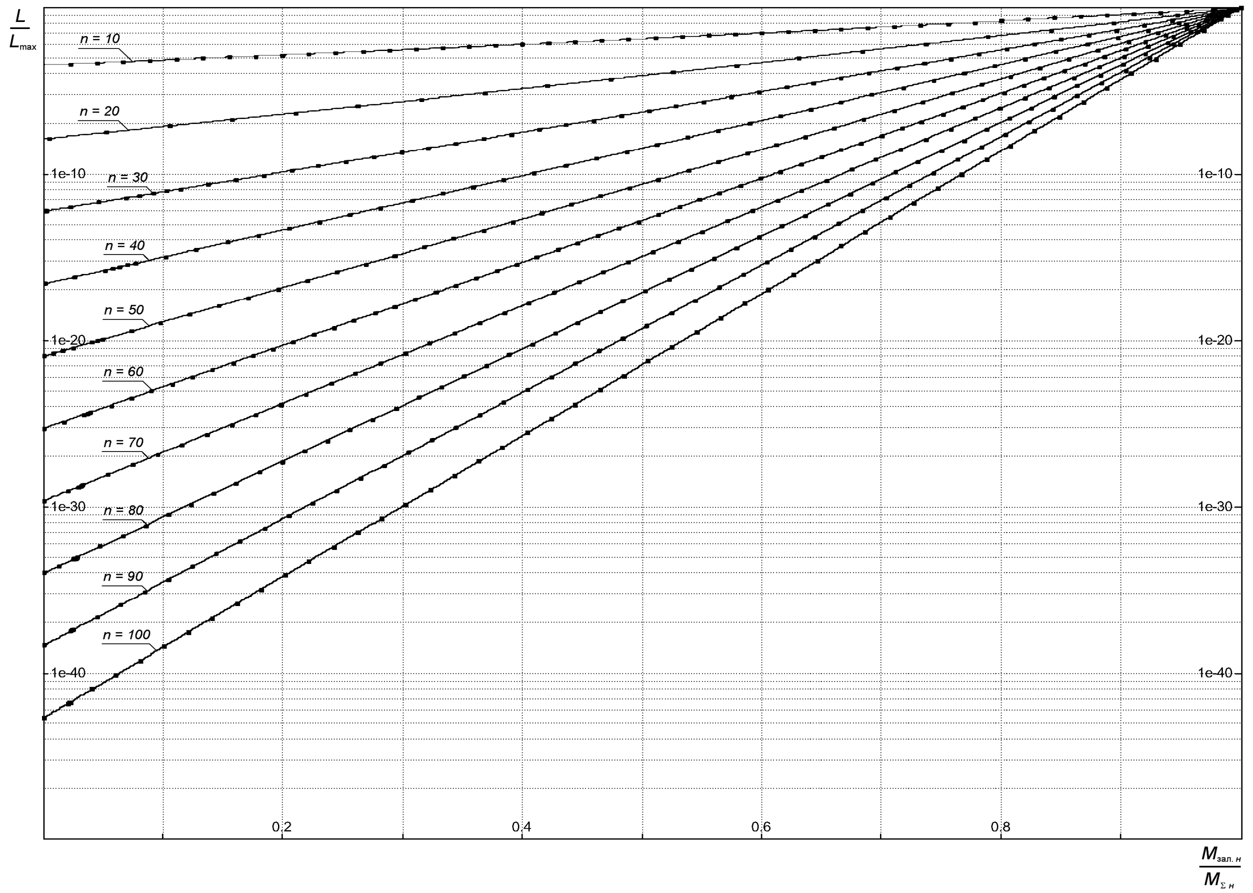

Рис. 2. Нормований графік залежності кількості шляхів усіх рангів від кількості гілок у мережі у логарифмічній шкалі осі ординат

Оцінковим показником структурної надійності мережі загалом може виступати показник структурної надійності довільного зв'язку у цій мережі. Обчислення останнього може ґрунтуватися на відносній кількості шляхів m_{ij}, що припадають на кожен зв'язок. Кількість шляхів рангу r, які припадають на один зв'язок, розраховується як відношення загальної кількості шляхів $M_{r\ \text{зал}}$ до відомої кількості t зв'язків:

$$m_{r\ ij} = \frac{M_{r\ \text{зал}}}{t}. \tag{23}$$

Якщо мережа не містить незв'язаних між собою підмереж і неприєднаних до неї вузлів (ступінь кожного вузла більший від нуля), то загальна кількість $t_{\max}$ зв'язків визначиться як

$$t_{\max} = 2L_{\max} = n(n-1), \tag{24}$$

а кількість шляхів $m_{r\ ij}$, що припадають на кожен зв'язок, відповідно:

$$m_{r\ ij} = \frac{M_{r\ \text{зал}}}{n(n-1)}. \tag{25}$$

Формули (23) і (25) дають змогу знайти ймовірності безвідмовної роботи зв'язків, що виступають показниками надійності їхнього функціонування.

Структурна надійність зв'язку, загалом кажучи, зумовлюється структурою шляхів, що становлять зв'язок, у тому числі різними ймовірностями p_{xy} безвідмовної роботи гілок, що входять у шляхи зв'язку, а також різними вагами значущості зв'язків. З урахуванням різних ймовірностей p_{xy} безвідмовної роботи гілок ймовірність безвідмовної роботи одного шляху m рангу r становитиме $p_{m\ r} = \prod_{x,y \in m} p_{xy}$. Точне значення ймовірності безвідмовної роботи множини з $m_{r\ ij}$ шляхів рангу r, з'єднаних паралельно, становитиме $1-\prod_{m=1}^{m_{r\,ij}}\left(1-\prod_{x,y\in m}p_{xy}\right)$, а сукупності шляхів рангу від 1 до R, які з'єднані паралельно і реалізують зв'язок між вузлами i та j, – відповідно:

$$P_{ij} = 1-\prod_{r=1}^{R}\left(\prod_{m=1}^{m_{r\,ij}}\left(1-\prod_{x,y\in m}p_{xy}\right)\right). \tag{26}$$

Розрахунок за цією формулою, однак, вимагає відшукання не тільки кількості шляхів рангу не більше за R у зв'язку, але й самих цих шляхів для того, щоб підставити потрібні величини p_{xy}, а це, як вказувалося вище, робить його складним у використанні щодо великих мереж. Отже, за наявності тільки величини $m_{r\ ij}$ можлива лише приблизна оцінка, що припускає рівність ймовірностей безвідмовної роботи гілок. До того ж сама кількість $m_{r\,ij}$, знайдена за формулою (23), є приблизною, оскільки розрахунок його виконується в припущенні взаємної подоби зв'язків між парами вузлів, що тяжіють, за їхніми структурними характеристиками.

У разі рівних ймовірностей p_{xy} безвідмовної роботи гілок ймовірність безвідмовної роботи одного шляху m рангу r між вузлами i–j становитиме $p_{m\,r} = p_{xy}^{r}$. Ймовірність відмови сукупності шляхів рангу r, з'єднаних паралельно, становитиме $q_r = \left(1-p_{xy}^{r}\right)^{m_{r\,ij}}$, а сукупності всіх шляхів рангу від 1 до R, тобто зв'язку i-j, реалізованого шляхами рангу від 1 до R, – $q_{1..R} = \prod_{r=1}^{R}\left(1-p_{xy}^{r}\right)^{m_{r\,ij}}$.

Відповідно шукана ймовірність безвідмовної роботи зв'язку i-j становитиме:

$$P_{ij} = 1-\prod_{r=1}^{R}\left(1-p_{xy}^{r}\right)^{m_{r\,ij}}. \tag{27}$$

З урахуванням значущостей зв'язків показником структурної надійності мережі загалом може виступити середньозважене значення ймовірності безвідмовної роботи усіх зв'язків:

$$P_{\text{мер}} = \frac{\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} z_{ij}\cdot p_{ij}}{\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} z_{ij}}. \tag{28}$$

Висновок. Запропонований метод дає змогу оцінити структурну надійність мережі зв'язку довільної розмірності і зв'язності. Необхідне для оцінки припущення про рівність безвідмовної роботи ребер робить метод найбільш застосовним для оцінки надійності проектованих мереж на етапі формування структури шляхів і зв'язків, а також мереж, побудованих на основі однотипного обладнання і з використанням близьких за своїми характеристиками каналів зв'язку.

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высш. шк., 2007. – 575 с. 2. Давыдов Г. Б. Сети электросвязи / Г.Б. Давыдов , В.Н. Рогинский , А.Я. Толчан. – М.: Связь, 1977. – С. 172. 3. Кутузов О.И. Моделирование телекоммуникационных сетей / О.И. Кутузов, Т.М. Татарникова. – СПб.: СПбГУТ им. Бонч-Бруевича, 1999. – 288 с. 4. Надежность технических систем: Справочник / [Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев, В.В. Болотин и др.; под ред. И.А. Ушакова]. – М.: Радио и связь, 1985. – С. 100–111. 5. Надійність техніки. Терміни та визначення: ДСТУ 2860-94 – [Чинний від 1996–01–01]. – К.: Держспоживстандарт України, 1996. – 76 с. – (Національний стандарт України). 6. Хиль М.И., Покушалов А.Н. Алгоритм оценки структурной надёжности компьютерных сетей. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://omg.sed.lg.ua/files/articles_sr.exe.