

УДК 621.382.323

Азаров І.В., Синицький Л.А.

Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра радіотехніки

ЗАСТОСУВАННЯ КУСКОВО-ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ

© Азаров І.В., Синицький Л.А., 2000

Для дослідження стійкості цифрових фільтрів з заокругленням до найближчого цілого запропоновано використання кусково-лінійних функцій. Це дозволило знайти область асимптотичної стійкості в цілому в області коефіцієнтів.

Дослідження стійкості цифрових фільтрів з заокругленням другим методом Ляпунова запропоновано в [1] і продовжено у [2]. Здебільшого функції Ляпунова використовувались у вигляді квадратичних форм. Це дає змогу визначати необхідні та достатні умови стійкості для лінійних дискретних систем, а при малій нелінійності – достатні умови. При використанні такого підходу для вивчення впливу заокруглення умови асимптотичної стійкості у цілому отримати неможливо: вдається знайти тільки обмеження на амплітуду автоколивань. Тому ведеться пошук більш придатних для цієї задачі функцій Ляпунова.

Пропонується використання кусково-лінійних функцій, які були успішно застосовані для аналізу неперервних систем. Розглянемо такий підхід спочатку для лінійної дискретної системи другого порядку:

$$x_{m+1} = ax_m + bx_{m-1},$$

яку подамо у вигляді

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= ax_m + by_m, \\ y_{m+1} &= x_m. \end{aligned} \quad (1)$$

Функцію Ляпунова подамо у вигляді

$$Y_m = |x_m| + \beta|y_m|, \beta > 0.$$

Тоді

$$\Delta V_m = V_{m+1} - V_m,$$

згідно з рівнянням (1), набуває вигляду:

$$\Delta V_m = |ax_m + by_m| + \beta|x_m| - |x_m| - \beta|y_m|.$$

Якщо $ax_m + by_m > 0$, маємо

$$\Delta V_m = ax_m - (1-\beta)|x_m| + by_m - \beta|y_m|.$$

Для того, щоб приріст ΔV_m був від'ємним для всіх x_m, y_m , необхідно і достатньо виконання двох умов:

$$|a| < 1 - \beta \text{ і } |b| < \beta, \quad (2)$$

Ці умови (2) зберігаються також при $ax_m + by_m < 0$. Виключаємо β і приходимо до умови стійкості у вигляді

$$|a| + |b| < 1.$$

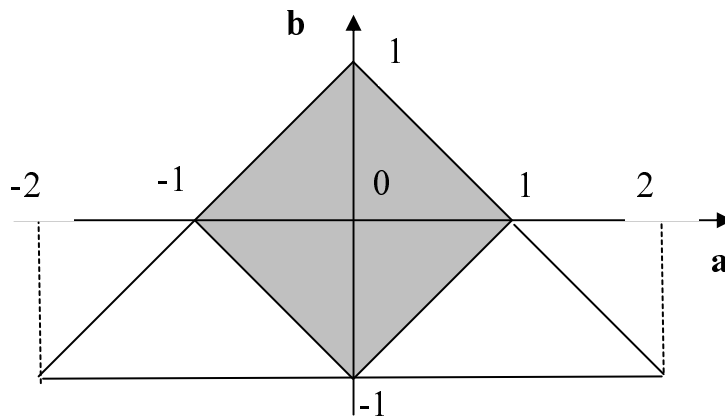


Рис.1.

На рис. 1 наведені дві зони стійкості у просторі параметрів a, b – заштрихована область отримана при застосуванні другого методу Ляпунова, інша – відома область стійкості. Бачимо, що для від'ємних b результати є незадовільними – визначена лише частина області стійкості. Тому пошук більш вдалих функцій Ляпунова варто продовжити.

Застосуємо таку ж функцію Ляпунова для дослідження впливу заокруглення на тійкість цифрового фільтра. Рівняння у цьому випадку набуває вигляду

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= R(ax_m) + R(by_m), \\ y_{m+1} &= x_m, \end{aligned} \quad (3)$$

де $R(z)$ – функція заокруглення до найближчого цілого.

Якщо $R(ax_m) + R(by_m) > 0$, то

$$\Delta V_m = R(ax_m) - (1 - \beta)|x_m| + R(by_m) - \beta|y_m| \quad (4)$$

Необхідні та достатні умови невід'ємності ΔV_m набувають вигляду:

$$\begin{aligned} R(ax_m) - (1 - \beta)|x_m| &< 0, \\ R(by_m) - \beta|y_m| &< 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Змінні x_m, y_m є цілими числами. Тому при $\beta = 0.5$ умови (5) набувають вигляду:

$$R(aN_1) < \frac{N_1}{2}, R(bN_2) < \frac{N_2}{2},$$

де N_1, N_2 – довільні додатні цілі числа. З вигляду характеристики $R(z)$ випливає, що

$$R(aN_1) \leq \frac{N_1}{2}, R(bN_2) \leq \frac{N_2}{2},$$

якщо

$$|a| < 0.5 \text{ і } |b| < 0.5. \quad (6)$$

Такі ж умови (6) отримуємо у випадку

$$R(ay_m) + R(bx_m) < 0.$$

Тоді при виконанні цих умов $\Delta V_m \leq 0$. З теорем Ляпунова в їх класичній формі для асимптотичної стійкості необхідна строга нерівність.

Для дискретних систем, подібно як для неперервних [3], можна застосувати узагальнення, яке полягає у тому, що рівність $\Delta V_m = 0$ не перешкоджає висновку про

асимптотичну стійкість, якщо множина точок, для яких $\Delta V_m = 0$, не містить цілих траєкторій.

Умова $\Delta V_m = 0$ означає, що для цих траєкторій величина $V_m = |x_m| + \beta|y_m|$ незмінна. Це можливо при $|x_m| = |y_m|$. Тобто при виконанні (6) можуть існувати два режими нестійкості: постійне зміщення і автоколивання з періодом 2,0.

Знайдемо підмножину множини (6), де спостерігається нестійкість типу постійне зміщення ($x_m = y_m$). Із (4) випливає, що

$$\Delta V_m = R(ax_m) - |x_m| + R(by_m) = 0. \quad (7)$$

Рівність (7) в просторі коефіцієнтів (a, b) може виконуватися для парних x_m в наступних підмножинах області (6):

$$(0.25 \leq a \leq 0.5) \cap (0.25 \leq b \leq 0.5), \quad (I)$$

$$(-0.5 \leq a \leq -0.25) \cap (-0.5 \leq b \leq -0.25). \quad (II)$$

Для області (II) неможливе виконання (3) за умови $x_m = \text{const}$.

Знайдемо максимальне постійне зміщення для області (I).

$$N = R(aN) + R(bN) \leq \frac{N}{2} - N\left(\frac{1}{2} - a\right) + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} - N\left(\frac{1}{2} - b\right) + \frac{1}{2} = N + 1 - N(1 - a - b)$$

Звідси:

$$N < \frac{1}{1 - a - b}. \quad (8)$$

Бачимо, що при наближенні до точки $a=0.5$, $b=0.5$ максимальне постійне зміщення може бути як завгодно великим. Тому результати оцінки максимальної амплітуди [1] виглядають занадто оптимістичними.

Знайдемо підмножину множини (6), де спостерігається нестійкість типу автоколивань $x_m = -y_m$. Із (4) випливає

$$\Delta V_m = R(ax_m) - |x_m| - R(by_m) = 0. \quad (9)$$

Рівність (9) може виконуватися для парних x_m в областях

$$(-0.5 \leq a \leq -0.25) \cap (0.25 \leq b \leq 0.5), \quad (I \text{ a})$$

$$(0.25 \leq a \leq 0.5) \cap (-0.25 \leq b \leq -0.5). \quad (II \text{ a})$$

Для області (II a) неможливе виконання (3) за умови $x_m = (-1)^m$.

Аналізуючи максимальну амплітуду автоколивань з періодом два для області (I a) аналогічно до того, як була отримана (8), знаходимо:

$$N < \frac{1}{1 + a - b}$$

Вилучивши з квадрата (6) області (I) і (I a), отримуємо область стійкості системи (3), зображену на рис.2.

Висновки. Визначена область стійкості фільтра другого порядку з нелінійністю заокруглення типу Round.

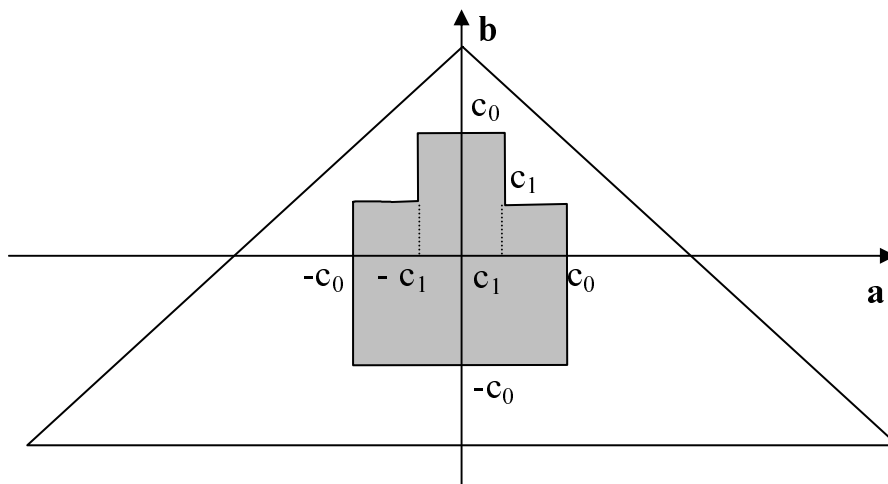


Рис. 2

Тут $c_0=0.5$, $c_1=0.25$

Порівняння з результатами чисельного експерименту дає змогу з великою вірогідністю вважати, що виявлена область дає не лише достатні, а й необхідні умови стійкості.

1. S. R. Parker. *Limit-Cycle Oscillations in Digital Filters* // *IEEE Trans. on Circuit Theory*, Nov. 1971. 2. B. D. Green and L. E. Turner. *New Limit Cycle Bounds for Digital Filters* // *IEEE Trans. on Circuits and System*. 1988. №4. 3. Барбашин Е.А. *Введение в теорию устойчивости*. М. 1967.

УДК 621.382

Базилевич Р.П., Рибак О.Г.

ДУ “Львівська політехніка”, кафедра ПЗ

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАКУВАННЯ ПРОГРАМОВАНИХ ЛОГІЧНИХ МАТРИЦЬ НА ОСНОВІ ОПТИМАЛЬНОГО ЗГОРТАННЯ СХЕМ

© Базилевич Р.П., Рибак О.Г., 2000

Розроблено нові ітераційні алгоритми оптимізації пакування програмованих логічних матриць. Оптимізація реалізується на основі парного групового обміну елементів та кластерів довільних розмірів, виділених методом оптимального згортання. Експерименти підтвердили ефективність запропонованого підходу.

ВСТУП

Метод оптимального згортання схем [1] створює широкі можливості для розв’язування різноманітних задач декомпозиції, в тому числі і задач пакування. Суть методу полягає в паралельному об’єднанні пар елементів або кластерів, які мають найкращі значення критерію згортання з наступним послідовним укрупненням аж до повного згортання всієї