УДК 528.21+531.26

А. Н. МАРЧЕНКО

О ГРАВИТАЦИОННОМ ТЕТРАПОЛЕ ЗЕМЛИ

Тетраполь как физический объект — это точечный заряд, расположенный в начале выбранной системы координат и получаемый в результате сближения (предельного перехода) двух октаполей (мультиполей третьего порядка). Он характеризуется направлениями четырех осей ($i=1$, 2, 3, 4) и величиной момента M_4. Тетраполь Земли приближенно можно описать системой шестнадцати точечных «гравитационных» зарядов, находящихся внутри Земли и расположенных на определенных расстояниях друг от друга. Все эти заряды считаются равными по абсолютной величине, однако половина из них имеет знак «плюс», а другая — «минус». Положительные заряды соответствуют избытку масс, а отрицательные — недостатку относительно некоторого сферически симметричного распределения масс внутри Земли.

Потенциал тетраполя выражают формулой [2]

$$V_4=\lim_{h_i\to 0} V^{(4)}=\frac{M_4}{4!}\frac{\partial^4}{\partial h_1\partial h_2\partial h_3\partial h_4}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{1}$$

где $V^{(4)}$ — потенциал системы указанных шестнадцати зарядов; $\partial/\partial h_i$ — означает дифференцирование по оси $\vec{h}_i$; r — расстояние от центра Земли до текущей точки и

$$M_4=4!qh_1h_2h_3h_4, \tag{2}$$

здесь q — величина точечного заряда, а h_i — расстояния между зарядами.

Используя известную формулу

$$V_4=\frac{Y_4}{r^5} \tag{3}$$

и выражение для сферической функции Y_4 по Максвеллу

$$Y_4=\frac{r^5}{4!}M_4\frac{\partial^4}{\partial h_1\partial h_2\partial h_3\partial h_4}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{4}$$

можно свести отыскание параметров тетраполя к определению полюсов и момента сферической функции четвертого порядка. Последнее, в свою очередь, эквивалентно решению следующей системы [3]:

$$\left.\begin{aligned}Z_n(\xi,\eta,\zeta)=0;\\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

в которой Z_n — символ шаровой функции n-го порядка, связанной со сферической функцией n-го порядка следующим соотношением:

$$Z_n(r,\vartheta,\lambda)=r^nY_n(\vartheta,\lambda),$$

где r, ϑ, λ — сферические координаты.

Пользуясь методикой, описанной в работе [3], и производя преобразования, подобные выполненным в работе [4], получим алгебраическое уравнение восьмой степени с комплексными коэффициентами:

$$a_0u^8+a_1u^7+a_2u^6+a_3u^5+a_4u^4+a_5u^3+a_6u^2+a_7u+a_8=0, \tag{7}$$

где

$$a_j=M_j+iN_j\quad (i=\sqrt{-1};\ j=0,1,2,\ldots 8), \tag{8}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
M_8&=M_0=3{,}5C_{40}-42C_{42}+84C_{44};\\
-M_7&=M_1=168S_{42}-672S_{44};\\
M_6&=M_2=14C_{40}+168C_{42}-2352C_{44};\\
-M_5&=M_3=168S_{42}+4704S_{44};\\
M_4&=21C_{40}+420C_{42}+5880C_{44};\\
-N_8&=N_0=14C_{41}-84C_{43};\\
N_7&=N_1=-28S_{41}+504S_{43};\\
-N_6&=N_2=28C_{41}+1176C_{43};\\
N_5&=N_3=-84S_{41}-1176S_{43};\\
N_4&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь C_{4m} и S_{4m} — стоксовы постоянные Земли в разложении ее потенциала по шаровым функциям Гаусса—Лежандра.

Каждый корень уравнения (7) соответствует одной общей образующей конических поверхностей (5). Пара образующих (а, значит, и пара корней) определяет плоскость, проходящую через начало координат, уравнение которой имеет вид [3]:

$$A\xi+B\eta+C\zeta=\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha_1+i\beta_1 & \alpha_2+i\beta_2 & i \\ -\alpha_1+i\beta_1 & -\alpha_2+i\beta_2 & i \end{vmatrix}=0, \tag{10}$$

где

$$\alpha_1^{(k)}+i\beta_1^{(k)}=\frac{1-u_k^2}{1+u_k^2}; \quad \alpha_2^{(k)}+i\beta_2^{(k)}=\frac{2u_k}{1+u_k^2}, \tag{11}$$

а u_k — корень уравнения (8).

Находим A, B, C и, нормируя $A\xi+B\eta+C\zeta=0$, определяем направляющие косинусы плоскостей (10), то есть косинусы перпендикуляров к этим плоскостям, которые и являются осями мультиполя.

Однако здесь, как и в работе [4], мы сталкиваемся с известной неопределенностью при нахождении конкретного направления осей мультиполя. В самом деле, плоскость в пространстве определяется перпендикулярным к ней вектором, выбор положительного направления на котором может быть двояким. Поэтому можно сказать, что такому аксиальному вектору соответствует не три, а шесть направляющих косинусов, попарно равных по модулю, но имеющих разные знаки.

Таким образом, из-за отсутствия правила, по которому в выражении (10) одну из образующих можно назвать первой, а другую — второй, при вычислении направляющих косинусов по (10) мы вынуждены получать их дважды для каждой оси мультиполя, меняя местами одни и те же образующие, тем самым однозначно определяя систему осей тетраполя, но получая неоднозначность в вычислении его полюсов. Частично эта неоднозначность устраняется выбором дополнительного условия, по которому момент сферической функции должен быть положителен [1].

Для нахождения коэффициентов алгебраического уравнения (7) по формулам (9) использовались значения гармоник (нормализованных) гравитационного поля Земли, взятые согласно «Стандартной Земли 1» [5]:

$$\left.\begin{array}{ll} C_{40}=1{,}608\cdot 10^{-6} & \\ C_{41}=-0{,}446\cdot 10^{-6} & S_{41}=-0{,}370\cdot 10^{-6} \\ C_{42}=0{,}078\cdot 10^{-6} & S_{42}=0{,}107\cdot 10^{-6} \\ C_{43}=0{,}055\cdot 10^{-6} & S_{43}=-0{,}014\cdot 10^{-6} \\ C_{44}=0{,}0008\cdot 10^{-6} & S_{44}=0{,}006\cdot 10^{-6} \end{array}\right\}. \qquad (*)$$

В результате вычислений получены следующие координаты точек сферы, в которых последняя пересекается осями тетраполя:

ϑ	λ
71° 47,4′ (108° 12,6′)	238° 13,0′ (58° 13,0′)
74° 53,1′ (105° 06,9′)	142° 27,1′ (322° 27,1′)
11° 30,0′ (168° 30,0′)	97° 34,1′ (277° 34,1′)
58° 49,2′ (121° 10,8′)	324° 10,1′ (144° 10,1′).

Считая полюсами тетраполя значения ϑ и λ, приведенные выше без скобок, основными, можно вычислить его момент, воспользовавшись следующей формулой (вывод подобной формулы для M_3 сделан в [4]):

$$M_4=\frac{fM\cdot a^4\cdot C_{40}}{N_4}, \qquad (12)$$

где по основной формуле Максвелла

$$N_4=\frac{1}{8}\Big[35\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4-5(\mu_1\mu_2\lambda_{34}+\mu_1\mu_3\lambda_{24}+\mu_1\mu_4\lambda_{23}+$$
$$+\mu_2\mu_3\lambda_{14}+\mu_2\mu_4\lambda_{13}+\mu_3\mu_4\lambda_{12})+\lambda_{12}\lambda_{34}+\lambda_{13}\lambda_{24}+\lambda_{14}\lambda_{23}\Big], \qquad (13)$$

а

$$\left.\begin{array}{l} \mu_i=\cos\vartheta_i\cos\vartheta+\sin\vartheta_i\sin\vartheta\cos(\lambda-\lambda_i); \\ \lambda_{ij}=\cos\vartheta_i\cos\vartheta_j+\sin\vartheta_i\sin\vartheta_j\cos(\lambda_i-\lambda_j). \end{array}\right\} \qquad (14)$$

отметим, что при вычислении принято $\vartheta=0°$.

Подставив численные значения в формулу (12), получим $M_4=0{,}51779\cdot 10^{37}$ м^{7}с$^{-2}$.

Вычислим теперь параметры тетраполей, соответствующих зональной и совокупности тессеральных гармоник Y_4, руководствуясь соображениями, изложенными в работе [4]. Отметим, что «зональный» тетраполь Земли отвечает планете, имеющей осевую симметрию (оси тетраполя — ось вращения Земли), а «незональный» — планете, асимметричной в долготном отношении. Положение осей указанных тетраполей даны ниже:

а) для «зонального» тетраполя»;

ϑ		λ
0°	(180°)	0°
0°	(180°)	0°
180°	(0°)	0°
180°	(0°)	0°

$$M_4^{\text{зон.}} = 0{,}10607 \quad 10^{37} \text{ м}^7\text{с}^{-2};$$

б) для «незонального» тетраполя:

ϑ		λ	
82° 10,6′	(97° 49,4′)	233° 22,6′	(53° 22,6′)
76° 51,7′	(103° 08,3′)	158° 50,5′	(338° 50,5′)
11° 29,2′	(168° 30,8′)	97° 39,4′	(277° 39,4′)
58° 41,7′	(121° 18,3′)	312° 31,8′	(132° 31,8′)

$$M_4^{\text{незон}} = 0{,}49347 \quad 10^{37} \text{ м}^7\text{с}^{-2}.$$

Поскольку в первом случае оси тетраполя совпадают с осью вращения Земли, то по положению осей и значению момента реального тетраполя можно судить о вкладе в фигуру Земли гармоник четвертого порядка. Сравнение параметров тетраполя Земли с параметрами «зонального» и «незонального» тетраполей показывает, что оси реального тетраполя планеты значительно ближе расположены к осям «незонального» тетраполя, чем к оси вращения Земли, причем $M_4 \approx M_4^{\text{незон}}$ а $M_4^{\text{зон}} \approx \frac{1}{5} M_4$. Поэтому влияние незональных гармоник, соответствующих сферической функции Y_4, на фигуру Земли является преобладающим. Кроме того, учитывая, что три оси тетраполя из четырех расположены сравнительно близко к плоскости экватора, отметим преобладающее, в свою очередь, влияние секториальных гармоник, так как оси «секториального» тетраполя должны находиться строго в плоскости экватора.

Таким образом, рассматривая тетраполи Земли для зональной и незональной частей Y_4 делаем вывод: в части фигуры Земли, описываемой гармониками четвертого порядка, преобладающее влияние «незонального» тетраполя над «зональным» свидетельствует о значительно большей асимметрии фигуры Земли в долготном отношении, чем в широтном, что является в основном следствием влияния секториальных гармоник $C_{44} = 0{,}0008 \cdot 10^{-6}$ и $S_{44} = 0{,}006 \cdot 10^{-6}$, нормализованные значения которых $\overline{C}_{44} = 0{,}04 \cdot 10^{-6}$, $\overline{S}_{44} = 0{,}30 \cdot 10^{-6}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Умов Н. А. Построение геометрического образа потенциала Гаусса, как прием изыскания законов земного магнетизма. Избр. соч. М.—Л., ГИТТЛ, 1950, с. 311—370.
2. Мещеряков Г. А. О мультипольном представлении гравитационного потенциала. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, № 19, с. 63—72.
3. Мещеряков Г. А. О нахождении полюсов сферических функций. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1976, № 23.
4. Марченко А. Н. О вычислении элементов октапбля Земли. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 23, 1976.
5. Стандартная Земля, геодезические параметры Земли. Перевод с англ., М., «Мир», 1969, 277 с.

Работа поступила в редколлегию 5 сентября 1975 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.