

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, А. В. ГОЛИКОВА

О СТЕПЕННЫХ МОМЕНТАХ ПЛОТНОСТИ ЗЕМНЫХ НЕДР

Как известно, степенными моментами плотности δ земных недр называются интегралы

$$I_{pqr}(\delta) = \int_{\tau} \delta x^p y^q z^r d\tau, \quad (p+q+r=n; n=0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

распространенные на весь объем τ Земли. Знание их сводит задачу нахождения плотности недр планеты к классической проблеме моментов, что следует из исследований П. Л. Чебышева, Т. Стильтьеса, А. А. Маркова. Это отмечалось также в работах [3, 11 и др.] и недавно было детально обсуждено в ряде наших статей [5, 4, 6, 7, 1, 8, 9]. Основное затруднение при этом вызвано тем, что численные значения степенных моментов (1) плотности земных недр нельзя точно получить по результатам наблюдений: из последних в настоящее время уверенно выводятся лишь так называемых стоксовых постоянных, представляющих собой линейные комбинации моментов. В статьях [6, 8] предложен метод нахождения по стоксовым постоянным квадратических приближений моментов (1). Ниже, пользуясь этим методом, мы даем приближенные значения степенных моментов плотности земных недр до шестого порядка включительно и одновременно дополняем до того же порядка известный список И. Д. Жонгловича [2] указанных линейных комбинаций моментов, доведенный им до четвертого порядка*.

* В работе [2] в выражении для C_{42} допущена опечатка: при I_{040} должен быть коэффициент $\frac{1}{24}$ вместо указанного там $\frac{1}{48}$.

Вместо размерных степенных моментов (1) выгоднее пользоваться безразмерными моментами вида

$$I_{pqr}(\delta) = \frac{1}{Ma^n} I_{pqr}, \quad (2)$$

где M — масса планеты ($M=J_{000}$); a — большая полуось ее экватора.

Приведем сначала выражения стоксовых постоянных пятого и шестого порядков через степенные моменты плотности (методика их вывода описана в работах [2, 8]):

$n=5$

$$C_{50} = \frac{15}{8} I_{401} + \frac{15}{4} I_{221} - 5 I_{203} + \frac{15}{8} I_{041} - 5 I_{023} + I_{005};$$

$$C_{51} = \frac{1}{8} I_{500} + \frac{1}{4} I_{320} - \frac{3}{2} I_{302} + \frac{1}{8} I_{140} - \frac{3}{2} I_{122} + I_{104};$$

$$S_{51} = \frac{1}{8} I_{410} + \frac{1}{4} I_{230} - \frac{3}{2} I_{212} + \frac{1}{8} I_{050} - \frac{3}{2} I_{032} + I_{014};$$

$$C_{52} = -\frac{1}{8} I_{401} + \frac{1}{4} I_{203} + \frac{1}{8} I_{041} - \frac{1}{4} I_{023};$$

$$S_{52} = -\frac{1}{4} I_{311} - \frac{1}{4} I_{131} + \frac{1}{2} I_{113};$$

$$C_{53} = -\frac{1}{192} I_{500} + \frac{1}{96} I_{320} + \frac{1}{24} I_{302} + \frac{1}{64} I_{140} - \frac{1}{8} I_{122}; \quad (3)$$

$$S_{53} = -\frac{1}{64} I_{410} - \frac{1}{96} I_{302} + \frac{1}{8} I_{212} + \frac{1}{192} I_{050} - \frac{1}{24} I_{032};$$

$$C_{54} = \frac{1}{192} I_{401} - \frac{1}{32} I_{221} + \frac{1}{192} I_{041}; \quad S_{54} = \frac{1}{48} I_{311} - \frac{1}{48} I_{131};$$

$$C_{55} = \frac{1}{1920} I_{500} - \frac{1}{192} I_{320} + \frac{1}{384} I_{140};$$

$$S_{55} = \frac{1}{384} I_{410} - \frac{1}{192} I_{230} + \frac{1}{1920} I_{050};$$

$$\begin{aligned}
 C_{60} &= \frac{5}{16} I_{600} - \frac{15}{16} I_{420} + \frac{45}{8} I_{402} - \frac{15}{16} I_{240} + \frac{45}{4} I_{222} - \frac{15}{2} I_{204} - \\
 &\quad - \frac{5}{16} I_{060} + \frac{45}{8} I_{042} - \frac{15}{2} I_{024} + I_{006}; \\
 C_{61} &= \frac{5}{8} I_{501} + \frac{5}{4} I_{321} - \frac{5}{2} I_{303} + \frac{5}{8} I_{141} - \frac{5}{2} I_{123} + I_{105}; \\
 S_{61} &= \frac{5}{8} I_{411} + \frac{5}{4} I_{231} - \frac{5}{2} I_{213} + \frac{5}{8} I_{051} - \frac{5}{2} I_{033} + I_{015}; \quad (4) \\
 C_{62} &= \frac{1}{64} I_{600} + \frac{1}{64} I_{420} - \frac{1}{4} I_{402} - \frac{1}{64} I_{240} + \frac{1}{4} I_{204} - \\
 &\quad - \frac{1}{64} I_{060} + \frac{1}{4} I_{042} - \frac{1}{4} I_{024}; \\
 S_{62} &= \frac{1}{32} I_{510} + \frac{1}{16} I_{330} - \frac{1}{2} I_{312} + \frac{1}{32} I_{150} - \frac{1}{2} I_{132} + \frac{1}{2} I_{114}; \\
 C_{63} &= -\frac{1}{64} I_{501} + \frac{1}{32} I_{321} + \frac{1}{24} I_{303} + \frac{3}{64} I_{141} - \frac{1}{8} I_{123}; \\
 S_{63} &= -\frac{3}{64} I_{411} - \frac{1}{32} I_{231} + \frac{1}{8} I_{213} - \frac{1}{64} I_{051} - \frac{1}{24} I_{033}; \\
 C_{64} &= -\frac{1}{1920} I_{600} + \frac{1}{384} I_{420} + \frac{1}{192} I_{402} + \frac{1}{384} I_{240} - \frac{1}{32} I_{222} - \\
 &\quad - \frac{1}{1920} I_{060} + \frac{1}{192} I_{042}; \\
 S_{64} &= -\frac{1}{480} I_{510} + \frac{1}{48} I_{312} + \frac{1}{480} I_{150} - \frac{1}{48} I_{132}; \\
 C_{65} &= \frac{1}{1920} I_{501} - \frac{1}{192} I_{321} + \frac{1}{384} I_{141}; \\
 S_{65} &= \frac{1}{384} I_{411} - \frac{1}{192} I_{231} + \frac{1}{1920} I_{051}; \\
 C_{66} &= \frac{1}{23040} I_{600} - \frac{1}{1536} I_{420} + \frac{1}{1536} I_{240} - \frac{1}{23040} I_{060}; \\
 S_{66} &= \frac{1}{3840} I_{510} - \frac{1}{1152} I_{330} + \frac{1}{3840} I_{150}.
 \end{aligned}$$

Не описывая метода [8], отметим, что на его основе моменты до четвертого порядка были получены ранее и уже использовались в ряде исследований [1, 7, 9]. Теперь в систематическом виде приведем выражения степенных моментов всех отмеченных порядков (от второго до шестого) через стоксовы постоянные действительной Земли и некоторой исходной модели, которая — в соответствии с нашими построениями [9] — последовательно уточняется благодаря использованию моментов, найденных на предыдущих этапах.

Для краткости приводим поправки V_{pqr} в степенные моменты, вычисленные на основании исходной модели [8], которые обозначим символом I_{pqr}^b . Таким образом, получение уравненных степенных моментов I_{pqr}^b любого порядка следует вычислять по формуле:

$$I_{pqr} = I_{pqr}^b + V_{pqr}. \quad (5)$$

При $n=2$ выражения поправок имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} V_{200} &= \frac{1}{3} A_{20} - 2A_{22}; & V_{020} &= \frac{1}{3} A_{20} + 2A_{22}; & V_{002} &= -\frac{2}{3} A_{20}; \\ V_{110} &= -2B_{22}; & V_{101} &= -A_{21}; & V_{011} &= -B_{21}. \end{aligned} \quad (6)$$

В формулах (6) и далее введены сокращенные обозначения:

$$A_{nh} = C_{nh}^b - C_{nh}; \quad B_{nh} = S_{nh}^b - S_{nh}, \quad (7)$$

где C_{nh} и S_{nh} — стоксовы постоянные n -го порядка для реальной Земли; C_{nh}^b и S_{nh}^b — значения соответствующих стоксовых постоянных, вычисленные для исходной модели Земли, полученной с учетом стоксовых постоянных до $(n-1)$ -го порядка включительно.

$n=3$

$$V_{300} = \frac{3}{11} (A_{31} - 10A_{33}); \quad V_{210} = \frac{1}{11} (B_{31} - 78B_{33});$$

$$V_{201} = \frac{1}{11} (3A_{30} - 22A_{32});$$

$$V_{120} = \frac{1}{11} (A_{31} + 78A_{33}); \quad V_{111} = -2B_{32}; \quad V_{102} = -\frac{2}{11} (5A_{31} - 6A_{33}); \quad (8)$$

$$V_{030} = \frac{3}{11} (B_{31} + 10B_{33});$$

$$V_{021} = \frac{1}{11} (3A_{30} + 22A_{32}); \quad V_{012} = -\frac{2}{11} (5B_{31} + 6B_{33});$$

$$V_{003} = -\frac{2}{11} A_{30}.$$

$n=4$

$$V_{400} = -\frac{3}{370} (3A_{40} - 40A_{42} + 680A_{44}); \quad V_{310} = \frac{6}{19} (B_{42} - 76B_{44});$$

$$V_{301} = \frac{3}{19} (3A_{41} - 26A_{43});$$

$$V_{220} = -\frac{3}{370} (A_{40} - 3720A_{44}); \quad V_{211} = \frac{3}{19} (B_{41} - 42B_{43});$$

$$V_{202} = \frac{3}{370} (19A_{40} - 240A_{42} + 360A_{44});$$

$$V_{130} = \frac{6}{19} (B_{42} + 76B_{44}); \quad V_{121} = \frac{3}{19} (A_{41} + 42A_{43});$$

$$V_{112} = -\frac{36}{19} A_{42}; \tag{9}$$

$$V_{103} = -\frac{2}{19} (5A_{41} - 18A_{43}); \quad V_{040} = -\frac{3}{370} (3A_{40} + 40A_{42} + 680A_{44});$$

$$V_{031} = \frac{3}{19} (3B_{41} + 26B_{43});$$

$$V_{022} = \frac{3}{370} (19A_{40} + 240A_{42} + 360A_{44}); \quad V_{013} = -\frac{2}{19} (5B_{41} - 18B_{43});$$

$$V_{004} = -\frac{1}{370} (19A_{40} + 360A_{44}).$$

$$n=5$$

$$V_{500} = -\frac{5}{398} (3A_{51} - 44A_{53} + 1272A_{55});$$

$$V_{410} = -\frac{1}{1990} (31B_{51} - 1668B_{53} + 153240B_{55});$$

$$V_{401} = -\frac{1}{1990} (75A_{50} - 1592A_{52} + 17160A_{54});$$

$$V_{320} = -\frac{1}{1990} (23A_{51} + 724A_{53} - 302280A_{55});$$

$$V_{311} = \frac{2}{3} (B_{52} - 36B_{54});$$

$$V_{302} = \frac{1}{1990} (773A_{51} - 10276A_{53} + 15720A_{55});$$

$$V_{230} = -\frac{1}{1990} (23B_{51} - 724B_{53} - 302280B_{55});$$

$$V_{221} = -\frac{1}{398} (5A_{50} - 11592A_{54});$$

$$V_{212} = \frac{3}{398} (17B_{51} - 812B_{53} + 840B_{55});$$

$$V_{203} = \frac{1}{5970} (475A_{50} - 9552A_{52} + 45000A_{54}); \quad (10)$$

$$V_{140} = -\frac{1}{1990} (31A_{51} + 1668A_{53} + 153240A_{55});$$

$$V_{131} = \frac{2}{3} (B_{52} + 36B_{54});$$

$$V_{122} = \frac{3}{398} (17A_{51} + 812A_{53} + 840A_{55}); \quad V_{113} = -\frac{4}{3} B_{52};$$

$$V_{104} = -\frac{3}{1990} (143A_{51} - 1036A_{53} + 3320A_{55});$$

$$V_{050} = -\frac{5}{398} (3B_{51} + 44B_{53} + 1272B_{55});$$

$$V_{041} = -\frac{1}{1990} (75A_{50} + 1592A_{52} + 17160A_{54});$$

$$V_{032} = \frac{1}{1990} (773B_{51} + 10276B_{53} + 15720B_{55});$$

$$V_{023} = \frac{1}{5970} (475A_{50} + 9552A_{52} + 45000A_{54});$$

$$V_{014} = -\frac{3}{1990} (143B_{51} + 1036B_{53} + 3320B_{55});$$

$$V_{005} = -\frac{1}{1194} (19A_{50} + 1800A_{54}).$$

$n=6$

$$V_{600} = \frac{5}{849677} (355A_{60} - 11254A_{62} + 185784A_{64} - 8913168A_{66});$$

$$V_{510} = -\frac{5}{8989} (101B_{62} - 4272B_{64} + 530856B_{66});$$

$$V_{501} = -\frac{5}{17978} (265A_{61} - 5916A_{63} + 81672A_{65});$$

$$V_{420} = \frac{1}{2549031} (2265A_{60} - 11254A_{62} - 5707800A_{64} + 1948742640A_{66});$$

$$V_{411} = \frac{1}{178} (5B_{61} - 372B_{63} + 14760B_{65});$$

$$V_{402} = -\frac{4}{2549031} (20535A_{60} - 635851A_{62} + 9023400A_{64} - 14180040A_{66});$$

$$V_{330} = -\frac{1}{178} (6B_{62} - 173520B_{66});$$

$$V_{321} = -\frac{1}{17978} (385A_{61} + 15828A_{63} - 2665560A_{65});$$

$$V_{312} = \frac{1}{8989} (5959B_{62} - 213600B_{64} + 254520B_{66});$$

$$V_{303} = \frac{3}{178} (15A_{61} - 308A_{63} + 1560A_{65});$$

$$V_{240} = \frac{1}{2549031} (2265A_{60} + 11254A_{62} - 5707800A_{64} - 1948742640A_{66});$$

$$V_{231} = -\frac{1}{17978} (385B_{61} - 15828B_{63} - 2665560B_{65});$$

$$V_{222} = \frac{60}{5627} (A_{60} - 2520A_{64});$$

$$V_{213} = \frac{3}{17978} (465B_{61} - 30324B_{63} + 105320B_{65});$$

$$V_{204} = \frac{2}{2549031} (43335A_{60} - 1271702A_{62} + 12339000A_{64} - 28360080A_{66});$$

$$V_{150} = -\frac{5}{8989} (101B_{62} + 4272B_{64} + 530856B_{66});$$

$$V_{141} = -\frac{1}{178} (5A_{61} + 372A_{63} + 14760A_{65});$$

$$V_{132} = \frac{1}{8989} (5959B_{62} + 213600B_{64} + 254520B_{66});$$

$$V_{123} = \frac{3}{17978} (465A_{61} + 30324A_{63} + 105320A_{65}); \quad (11)$$

$$V_{114} = \frac{1}{89} (59B_{62} + 2520B_{66});$$

$$V_{105} = -\frac{3}{17978} (501A_{61} - 6300A_{63} + 57800A_{65});$$

$$V_{060} = \frac{5}{849677} (355A_{60} + 11254A_{62} + 185784A_{64} + 8913168A_{66});$$

$$V_{051} = -\frac{5}{17978} (265B_{61} + 5916B_{63} + 81672B_{65});$$

$$V_{042} = -\frac{4}{2549031} (20535A_{60} + 63585A_{62} + 9023400A_{64} + \\ + 14180040A_{66});$$

$$V_{033} = \frac{3}{178} (15B_{61} + 308B_{63} + 1560B_{65});$$

$$V_{024} = \frac{2}{2549031} (43335A_{60} + 1271702A_{62} + 12339000A_{64} + \\ + 28360080A_{66});$$

$$V_{015} = -\frac{3}{17978} (501B_{61} + 6300B_{63} + 57800B_{65});$$

$$V_{006} = \frac{12}{849677} (321A_{60} + 9140A_{64}).$$

Приведенные здесь выражения (6), (8)–(11) сводят теперь нахождение распределения плотности земных недр к конкретной усеченной проблеме степенных моментов с учетом последних до шестого порядка включительно. При современных знаниях структуры внешнего гравитационного поля Земли, получаемого, в основном, по наблюдениям за ИСЗ, это позволяет приступить к построению уточненных (сравнительно с моделями [1, 7, 9]) глобальных механических моделей Земли, а также решить ряд задач геофизики и геодезии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голикова А. В. Новая механическая модель Земли. — «Доклады и научные сообщения», 1973, № 1, с. 120–124.
2. Жонголоуич И. Д. Потенциал земного притяжения. — «Бюллетень ИТА», 1957, т. VI, 8 (81).
3. Идельсон Н. И. Фундаментальные постоянные астрономии и геодезии. Астрономический ежегодник СССР на 1942 г. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1941.
4. Мещеряков Г. А. О корректности одной обратной задачи теории потенциала. — «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1969, № 8, с. 54–59.
5. Мещеряков Г. А. Об единственности решения одной обратной задачи теории потенциала. — «Сибирский математический журнал», 1970, т. XI, № 5, с. 1184–1187.
6. Мещеряков Г. А. Динамическая фигура Луны и распределение плотности лунных недр. — «Астрономический журнал», 1973, № 1, с. 186–200.
7. Мещеряков Г. А., Голикова А. В., Дейнека Ю. П. О некоторых новых моделях Земли. — «Геофизический сборник», 1974, № 60, с. 72–79.

8. Мещеряков Г. А. Использование стоксовых постоянных Земли для уточнения ее механических моделей. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1975, вып. 21, с. 23—30.

9. Мещеряков Г. А., Голикова А. В. Некоторые исследования нового метода вычисления плотности земных недр. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1975, вып. 22, с.

10. Groten E. On series of spherical garmonics of geopotential the Earth's surface. — «Bulletin Geodesique», 1968, № 88.

11. Mac Millan W. D. The theory of the potential. New York, 1958.

Работа поступила в редколлегию 6 мая 1975 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.
