

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, А. Н. МАРЧЕНКО

ОБ УРАВНЕНИИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕМ ОСИ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В статье [4] описана общая методика нахождения осей (полюсов) и моментов сферических функций. Самой трудоемкой частью ее является получение разрешающего проблему алгебраического уравнения степени $2n$ и его решение. Поэтому рассмотрим составление разрешающего уравнения и приведение его к виду, удобному при использовании ЭЦВМ, в случае произвольного порядка сферической функции.

Пусть сферическая функция представлена по Гауссу в виде

$$Y_n = K_n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(t), \quad (1)$$

где K_n , C_{nm} , S_{nm} — коэффициенты разложения данной функции Y_n , причем в случае изучения гравитационного поля Земли C_{nm} и S_{nm} — ее стоксовы постоянные, $K_n = fM \cdot a^n$ (f — гравитационная постоянная, M — масса планеты, a — ее экваториальный радиус), $P_n^m(t)$ — присоединенные функции Лежандра, $t = \cos \vartheta$, а ϑ — полярное расстояние и λ — долгота.

Для нахождения системы осей сферической функции необходимо решить алгебраическое уравнение степени $2n$, вытекающее из системы

$$Z_n(\xi, \eta, \zeta) = 0; \quad (2a) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0, \quad (2б)$$

где Z_n — символ шаровой функции n -го порядка, которая связана со сферической следующим соотношением

$$Z_n(r, \vartheta, \lambda) = r^n Y_n(\vartheta, \lambda), \quad (3)$$

где r — расстояние от начала системы координат до внешней точки.

Рассмотрим процесс составления алгебраического уравнения, соответствующего системе (2). Подставляя правую часть выражения (1) в формулу (3) и приравнявая полученную шаровую функцию нулю, получаем

$$\sum_{m=0}^n \Phi_n^m (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) = 0, \quad (4)$$

где

$$\Phi_n^m = P_n^m(t) \cdot rn. \quad (5)$$

Возьмем известное выражение [1] для присоединенных функций Лежандра

$$P_n^m(t) = \frac{(2n)!}{2^n n! (n-m)!} (1-t)^{\frac{m}{2}} \times \\ \times \left\{ t^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} t^{n-m-2} + \dots \right\}, \quad (6)$$

в котором для согласования последующих выводов с общепринятым в геодезии выражением для сферических функций опускаем множитель $(-1)^m$, считая его отнесенным к гармоникам C_{nm} и S_{nm} . Перейдя от сферических координат к прямоугольным $\left(t = \cos \vartheta = \frac{z}{r}\right)$ и, в соответствии с [8, 3, 4], заменив последние на ξ, η, ζ , воспользуемся следующей подстановкой [3, 4]:

$$\xi = \frac{1-u^2}{1+u^2} v; \quad \eta = \frac{2u}{1+u^2} v; \quad \zeta = iv; \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (7)$$

Тогда после некоторых преобразований получим

$$P_n^m(t) = \frac{(2n)!}{2^n n! (n-m)!} (r^2 + v^2)^{\frac{m}{2}} \times \\ \times \left\{ \frac{(iv)^{n-m}}{r^n} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cdot \frac{(iv)^{n-m-2}}{r^{n-2}} + \dots \right\} \quad (8)$$

Возвращаясь теперь к формуле (5), имеем

$$\Phi_n^m = \frac{(2n)!}{2^n n! (n-m)!} (r^2 + v^2)^{\frac{m}{2}} \times \\ \times \left\{ (iv)^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} (iv)^{n-m-2} r^2 + \dots \right\} \quad (9)$$

или, учитывая уравнение (2б) $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ и присутствие r

в правой части (9) в четных степенях в каждом слагаемом, приходим к окончательному выражению для Φ_n^m :

$$\Phi_n^m = \frac{(2n)!}{2^n n! (n-m)!} i^{n-m} \quad \text{или} \quad \Phi_n^m = \frac{(2n-1)!!}{(n-m)!} i^{n-m}. \quad (10)$$

Здесь опущен множитель v^n , так как Φ_n^m входит в качестве сомножителя в левую часть выражения (4), которое равно нулю, а $v \neq 0$.

Запишем теперь известные выражения для тригонометрических функций кратных дуг:

$$\sin m\lambda = \sum_{k=0} (-1)^k C_m^{2k+1} \cos^{m-(2k+1)} \lambda \sin^{2k+1} \lambda; \quad (11)$$

$$\cos m\lambda = \sum_{k=0} (-1)^k C_m^{2k} \cos^{m-2k} \lambda \sin^{2k} \lambda,$$

где C_m^s — биномиальные коэффициенты, вычисляемые по формуле

$$C_m^s = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-s+1)}{s!}; \quad (12)$$

а индекс суммирования $k=0, 1, 2, \dots$. Правые части выражений (11) содержат конечное число слагаемых, так как в силу (12) биномиальные коэффициенты обращаются в нуль, если $s > m$ ($s=2k+1$ или $s=2k$).

Таким образом, переходя в (11) от сферических координат к прямоугольным, заменяя последние на ξ, η, ζ и учитывая подстановку (7), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sin m\lambda &= (1+u^2)^{-m} \sum_{k=0} (-1)^k 2^{2k+1} C_m^{2k+1} (1-u^2)^{m-(2k+1)} u^{2k+1}; \\ \cos m\lambda &= (1+u^2)^{-m} \sum_{k=0} (-1)^k 2^{2k} C_m^{2k} (1-u^2)^{m-2k} u^{2k}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где, как уже отмечалось, $m \leq n$.

Для последующей подстановки формул (13) в уравнение (4) составим выражения

$$\left. \begin{aligned} (1+u^2)^n \sin m\lambda &= (1+u^2)^{n-m} \sum_{k=0} (-1)^k 2^{2k+1} C_m^{2k+1} \times \\ &\times (1-u^2)^{m-(2k+1)} u^{2k+1}; \\ (1+u^2)^n \cos m\lambda &= (1+u^2)^{n-m} \sum_{k=0} (-1)^k 2^{2k} C_m^{2k} \times \\ &\times (1-u^2)^{m-2k} u^{2k}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Разлагая в правой части (14) $(1+u^2)^{n-m}$ и $(1-u^2)^l$ (где $l=m-(2k+1)$ или $l=m-2k$) по формуле бинома, получаем

$$\left. \begin{aligned} (1+u^2)^n \sin m\lambda &= \sum_{k=0}^{n-1} R_k u^{2k+1}; \\ (1+u^2)^n \cos m\lambda &= \sum_{k=0}^n Q_k u^{2k}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_k &= H_0 C_{n-m}^k + H_1 C_{n-m}^{k-1} + H_2 C_{n-m}^{k-2} + \dots + H_{k-1} C_{n-m}^1 + H_k; \\ Q_k &= F_0 C_{n-m}^k + F_1 C_{n-m}^{k-1} + F_2 C_{n-m}^{k-2} + \dots + F_{k-1} C_{n-m}^1 + F_k. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Коэффициенты при C_p^q в (16), в свою очередь, выражаются через биномиальные коэффициенты, а именно:

$$\left. \begin{aligned} H_j &= (-1)^j [2C_m^1 C_{m-1}^j + 2^3 C_m^3 C_{m-3}^{j-1} + 2^5 C_m^5 C_{m-5}^{j-2} + \dots + \\ &\quad + 2^{2j-1} C_m^{2j-1} C_{m-(2j-1)}^1 + 2^{2j+1} C_m^{2j-1}]; \\ &\quad [0 \leq j \leq (n-1)] \\ F_j &= (-1)^j [C_m^0 C_m^j + 2^2 C_m^2 C_{m-2}^{j-1} + 2^4 C_m^4 C_{m-4}^{j-2} + \dots + \\ &\quad + 2^{2(j-1)} C_m^{2(j-1)} C_{m-2(j-1)}^1 + 2^{2j} C_m^{2j}]; \\ &\quad [0 \leq j \leq n] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Заметим, что, если надстрочный индекс биномиальных коэффициентов принимает отрицательное значение, то слагаемое с таким коэффициентом считается равным нулю.

Наконец, после подстановки (15) в (4) в результате некоторых преобразований получаем алгебраическое уравнение относительно u степени $2n$.

$$\sum_{m=0}^n \Phi_n^m \left(C_{nm} \sum_{k=0}^n Q_k u^{2k} + S_{nm} \sum_{k=0}^{n-1} R_k u^{2k+1} \right) = 0, \quad (18)$$

комплексные коэффициенты которого определяются соотношениями (10), (16) и (17).

Использование свойства биномиальных коэффициентов C_p^q в выражениях (16) и (17), а именно обращение их в нуль в случае $q > p$, приводит к легко обозримой процедуре составления общей программы решения разрешающего уравнения

(18) при любом N , при котором, однако, не превосходятся возможности конкретной ЭЦВМ. Эта программа позволяет отыскивать оси сферических функций произвольных порядков $n \leq N$. Она составлена нами для ЭЦВМ М-222 и может быть использована для нахождения осей гравитационных и магнитных мультиполей Земли и других планет.

После решения уравнения (18) находят направляющие косинусы осей сферической функции и ее момент, так как это показано в статье [4]. Заметим, что наши построения дают один из возможных путей преодоления ряда трудностей алгебраического и вычислительного характера в решении обсуждаемой проблемы, отмеченных в ряде работ [8, 4, 2, 6, 7] при рассмотрении ее различных аспектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Изд-во физико-математической литературы, 1962, 1094, с.
2. Золотов Н. Г. О представлении геомагнитного поля при помощи мультиполей. — «Геомагнетизм и аэрономия», 1966, т. VI, № 3, с. 556—567.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.—Л., Изд-во технической литературы, 1951, 476 с.
4. Мещеряков Г. А. О нахождении полюсов сферических функций. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1976, № 23.
5. Умов Н. А. Построение геометрического образа потенциала Гаусса как прием изыскания законов земного магнетизма. Избранные сочинения. М.—Л., ГИТТЛ, 1950, с. 311—370.
6. Groten E. On the spherical harmonics series of the geopotential at the Earth's surface. — «Bull. geodesiq», 1968, № 88, p. 227—239.
7. Hotin M. Mathematical Geodesy. Washington D.C. 1969.
8. Sylvester J. J. Note of spherical harmonics 1876. Collected Paper., vol. 3. Cambrige, 1909, p. 1—397.

Работа поступила в редколлегия 5 июня 1975 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.