УДК 528.22

И. Ф. МОНИН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МАССЫ ЗЕМЛИ

Как известно, массу Земли определяют по формуле

$$fM = a^2 g_e (1-\alpha) + \frac{2}{3} a^2 g_e \left(q - \frac{5}{7} q\alpha - \frac{1}{441} q\alpha^2 - \dots \right), \quad (1)$$

где f — гравитационная постоянная; M — масса уровенного эллипсоида вращения, наиболее подходящего к геоиду Земли;

a — большая полуось эллипсоида; α — его сжатие; g_e — экваториальная постоянная ускорения силы тяжести; ω — угловая скорость суточного вращения Земли;

$$q=\frac{\omega^2 a}{g_e}.$$

Формула (1) получена из решения проблемы Стокса для уровенного эллипсоида. В ней $a^2 g_e$ — величина нулевого порядка; $a^2 g_e \alpha$ — первого; $a^2 g_e \alpha q$ — второго и т. д. Размеры земного эллипсоида определяют по данным геодезических, астрономических и гравиметрических измерений. Экваториальную постоянную g_e находят по совокупности измерений земного ускорения на поверхности. Таким образом, для уровенного эллипсоида, зная его размеры и гравитационное поле, развиваемое им во внешнем пространстве, можно вычислить fM с любой точностью. Но полученная величина не будет равна массе геоида и, тем более, массе реальной Земли. Очевидно, нет необходимости определять fM с большой точностью, так как форма земного эллипсоида и его объем заметно отличаются от формы и объема реальной Земли с ее рельефом.

В последнее время размеры уровенного земного эллипсоида и некоторые элементы его внешнего гравитационного поля значительно уточнены по данным наблюдений искусственных спутников Земли. Наиболее интересные работы в этом направлении принадлежат замечательному чешскому геодезисту Милану Бурше. Полученное по данным наблюдений спутников значение fM, справедливо принимаемое как наиболее достоверное, принято относить к реальной Земле, хотя, в самом деле, оно характеризует более точный уровенный эллипсоид.

Рассмотрим, как можно уточнить произведение fM, полученное для уровенного земного эллипсоида, чтобы оно характеризовало геоид Земли или реальную Землю.

Напишем известные соотношения:

$$T=\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n+1} T_n; \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho}+\frac{2T}{\rho}=-\Delta g+2\,\frac{W_0-U_0}{\rho}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}+\frac{2\partial T}{\rho\partial \rho}-\frac{2T}{\rho^2}=-\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}-2\,\frac{W_0-U_0}{\rho^2}, \tag{4}$$

где T — возмущающий гравитационный потенциал Земли во внешнем пространстве; Δg — смешаная аномалия силы тяжести; ρ — расстояние от центра земного эллипсоида до текущей точки поверхности Земли; W_0, U_0 — гравитационные потенциалы Земли на уровне моря и уровенного земного эллипсоида на его поверхности; T_n — сферическая функция n-го порядка в разложении возмущающего потенциала.

Пусть на поверхности земной сферы радиуса a имеют место ряды сферических функций:

$$\Delta g=\sum_{0}^{n}\Delta g_n, \quad \frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}=\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_n. \tag{5}$$

Тогда, подставляя выражение (2) в (3) и (4) и учитывая соотношения (5), можно найти зависимость между сферическими функциями нулевого порядка:

$$T_0=-a\Delta g_0+2(W_0-U_0), \quad 2T_0=a^2\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0+2(W_0-U_0); \tag{6}$$

$$2(W_0-U_0)=a^2\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0+2\Delta g_0. \tag{7}$$

Для текущей точки внешнего пространства получаем

$$T=W_з-W_e=V_з-V_e=\frac{f\Delta M}{\rho}+\frac{A-B}{\rho^3}+\ldots, \tag{8}$$

где $W_з$, W_e — гравитационные потенциалы Земли и уровенного земного эллипсоида в текущей точке; $V_з$, V_e — потенциалы притяжения Земли и уровенного эллипсоида в той же точке; A, B — величины, зависящие от моментов инерции Земли и уровенного эллипсоида; $M_з-M_e=\Delta M$ — разность между массой Земли и массой уровенного эллипсоида.

Из соотношения (8) выразим fM через сферическую функцию нулевого порядка T_0 в разложении возмущающего потенциала

$$T_0=f\Delta M \tag{9}$$

и, принимая во внимание соотношения (6) и (7), найдем

$$f\Delta M=a^2\Delta g_0+a^3\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0. \tag{10}$$

Таким образом, мы выразили аномалию массы ΔM через сферические функции нулевого порядка в разложении аномалий силы тяжести и их вертикальных градиентов $\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}$. Применим теперь к соотношению (10) теорему восстановления сферических функций

$$R=\sum_{0}^{\infty}R_n; \quad R_n=\frac{2n+1}{4\pi}\iint RP_n(\cos\psi)\,d\sigma, \tag{11}$$

где R — произвольная функция сферических координат, заданная на сфере радиуса a; R_n — сферическая функция n-го порядка; $P_n(\cos\psi)$ — полином Лежандра; $d\sigma$ — элемент поверхности единичной сферы.

Из выражения (11) найдем

$$\Delta g_0 = \frac{1}{4\pi}\iint \Delta g d\sigma; \qquad \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} d\sigma. \tag{12}$$

Подставляем выражение (12) в (10), приходим к результату:

$$f\Delta M = \frac{1}{4\pi}\iint \left(\Delta g + a\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right) d\Sigma, \tag{13}$$

где $d\Sigma$ — элемент поверхности сферы радиуса a.

Формула (13) позволяет уточнить значение fM, вычисленное для уровенного земного эллипсоида. Погрешность при этом, как видно из вывода, имеет порядок сжатия эллипсоида.

Для вычисления по формуле (13) необходимо иметь данные аномалий силы тяжести и их вертикальных градиентов на поверхности Земли. Значения аномалий силы тяжести для Земли имеются, а вертикальных градиентов от аномалий силы тяжести пока еще нет. Поэтому применяя фактические данные Δg для формулы (13), нужно, очевидно, сначала их обработать, чтобы они характеризовали общее гравитационное поле Земли. При этом можно использовать, например, методику И. Д. Жонголовича [1]. Высотные коэффициенты «в» в этой методике характеризуют зависимость аномалий от высоты, то есть представляют собой вертикальные градиенты от аномалий силы тяжести. Следовательно, из предварительной обработки можно получить значения сглаженных аномалий силы тяжести и их вертикальных градиентов, а затем по формуле (13) численным интегрированием определить аномалию массы Земли. Вычисленная таким образом масса, представляет собой массу вещества Земли, заключенную внутри геоида.

Проверим формулу (13) на модели. Примем в качестве геоида уровенный эллипсоид Красовского, а за отсчетную поверхность — эллипсоид вращения, у которого большая полуось такая же, а малая на 100 м больше. Данная модель имеет следующие характеристики:

Геоид	Эллипсоид
$g_e = 978049$ мгл	$g_e = 978049$ мгл
$a = 6378245$ м	$a = 6378245$ м
$q = 0{,}0034677$	$q = 0{,}0034677$
$\alpha = 0{,}0033523$	$\alpha' = 0{,}0033366$
$\beta = 0{,}0053029$	$\beta' = 0{,}0053187$
$\beta_1 = 0{,}0000059$	$\beta_1' = 0{,}0000059$

Следовательно, аномалии силы тяжести определяем по формуле

$$\Delta g = g_e(\beta - \beta')\sin^2 B. \tag{14}$$

Для вертикальных градиентов аномалий силы тяжести можно получить такую формулу:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}=\frac{\partial g}{\partial \rho}-\frac{\partial \gamma}{\partial \rho}+\frac{2\Delta g}{a}. \tag{15}$$

На уровенном эллипсоиде

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}=-\frac{2g_e}{a}\left[1+\alpha+q-\left(3\alpha-\frac{5}{2}q\right)\right]. \tag{16}$$

Поэтому, для данной модели имеем:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}=-\frac{2g_e}{a}(\Delta\alpha-3\Delta\alpha\sin^2\bar{B})+\frac{2g_e}{a}\Delta\beta\sin^2 B, \tag{17}$$

где $\Delta\alpha=\alpha-\alpha'=0{,}0000157$; $\Delta\beta=-0{,}0000158=\beta-\beta'$; B — геодезическая широта.

Подставим в формулу (13) вместо Δg и $\dfrac{\partial \Delta g}{\partial \rho}$ их выражения (14) и (17):

$$f\Delta M=\frac{a^2 g_e}{4\pi}\iint\{\Delta\beta\sin^2\Phi-(\Delta\alpha-3\Delta\alpha\sin^2\Phi)2+2\Delta\beta\sin\Phi\}\,d\sigma.$$

Принимая во внимание, что

$$\iint d\sigma=4\pi,\qquad \iint\sin^2\Phi\,d\sigma=\frac{4}{3}\pi,$$

получим

$$f\Delta M=a^2 g_e\Delta\beta. \tag{18}$$

С другой стороны, по формуле (1), применяя ее для геоида и уровенного эллипсоида, легко найти

$$f\Delta M=-a^2\Delta g_e\Delta\alpha. \tag{19}$$

Сравнивая формулы (18) и (19), видим, что результаты вычислений по ним отличаются друг от друга на $a^2 g_e\alpha^3$ — величину третьего порядка. Таким образом, формула (13) позволяет вычислять $f\Delta M$ с относительной погрешностью порядка сжатия Земли, что и следовало ожидать.

В заключение отметим, что формулу, аналогичную формуле (13), можно получить для реальной Земли [2]

$$f\Delta M=\frac{1}{4\pi}\int\left(\Delta g\cos\alpha+\rho\frac{\partial \Delta g}{\partial n}\right)dS, \tag{20}$$

где n — внешняя нормаль к топографической поверхности Земли; α — угол между радиусом-вектором ρ и n; dS — элемент топографической поверхности. Здесь $\frac{\partial \Delta g}{\partial n}$ определяется по формуле

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial n} = \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \cos \alpha + \frac{\partial \Delta g}{\partial \tau} \sin \alpha,$$

где $\frac{\partial \Delta g}{\partial \tau}$ может быть получено из вариометрических измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жонголович И. Д. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. — «Тр. института теоретической астрономии», 1952, вып. 3.

2. Монин И. Ф. Новый метод вычисления элементов внешнего гравитационного поля и фигуры топографической поверхности Земли. — «Астрономический журнал АН СССР», 1966, т. 43, вып. 3.

Работа поступила в редколлегию 8 мая 1975 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского политехнического института.