РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1974 Геодезия, картогрфия и аэрофотосъемка Выпуск 19

УДК 528.33.35

Ю. Н. КОРНИЦКИЙ

О ТОЧНОСТИ ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА В СЕРЕДИНЕ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО РЯДА ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ, ПРОЛОЖЕННОГО МЕЖДУ СТОРОНАМИ С ИСХОДНЫМИ ДИРЕКЦИОННЫМИ УГЛАМИ

Наличие исходных дирекционных углов значительно повышает точность элементов ряда. При уравнивании такого ряда по методу условных измерений возникает $3n$ условных уравнений фигур вида (рисунок):

$$(8i-1)+(8i-2)+(8i-3)+(8i-4)+w_{i,1}=0, \tag{1}$$

$$(8i-5)+(8i-6)+(8i-7)+(8i)+w_{i,2}=0, \tag{2}$$

$$(8i-3)+(8i-4)+(8i-5)+(8i-2)+w_{i,3}=0, \tag{3}$$

$6n$ уравнений сторон вида:

$$(\lg a_{i-1})-(\lg b_{2i-1})+\delta_{8i-7}(8i-7)-\delta_{8i-4}(8i-4)+w_{i,4}=0, \tag{4}$$

$$(\lg b_{2i-1})-(\lg c_{2i-1})+\delta_{8i-7}(8i-7)+w_{i,5}=0, \tag{5}$$

$$(\lg a_i)-(\lg b_{2i})+(8i-3)\,\delta_{8i-3}-\delta_{8i}(8i)+w_{i,6}=0, \tag{6}$$

$$(\lg b_{2i})-(\lg c_{2i-1})-\delta_{8i-3}(8i-3)+w_{i,7}=0, \tag{7}$$

$$(\lg b_{2i-1})-(\lg c_{2i})-\delta_{8i-2}(8i-2)+w_{i,8}=0, \tag{8}$$

$$(\lg a_i)-(\lg c_{2i})-\delta_{8i-5}(8i-5)+w_{i,9}=0, \tag{9}$$

и уравнение дирекционных углов

$$\sum_{i=1}^{n}\{(8i-7)-(8i-3)\}+w_{\alpha}=0, \tag{10}$$

где i — номер квадрата;

$(8i-7)$, $(\lg a_i)$, $(\lg b_{2i})$ и $(\lg c_{2i})$ — вероятнейшие поправки к измеренным углам и логарифмам длин сторон; δ_{8i-7} — приращение логарифма синуса угла при изменении угла на $1''$.

Приращение дирекционного угла k-й связующей стороны равно

$$f_{\alpha_a}=\sum_{i=1}^{k}\{(8i-7)-(8i-3)\}, \tag{11}$$

а для диагонали квадрата с номером k соответственно

$$f_{\alpha_c}=\sum_{i=1}^{k-1}\{(8i-7)-(8i-3)\}+(8k-7). \tag{12}$$

На основании [2] при уравнивании веса углов принимались равными единице, веса логарифмов сторон равными $\frac{1}{q}$, где $q = \frac{1}{P_{\lg s}} \left(\frac{10^6 \mu \cdot m_s}{m \cdot S} \right)^2$.

Уравнивание выполнялось по методу двух групп. В первую группу включались два первых уравнения вида (1), во вторую все остальные уравнения. Преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы вычислялись по известным формулам [2]:

$$a_i = a_i' - \frac{[a_i']}{4} \text{ — (при поправках в углы);}$$

$$a_i = a_i' \sqrt{q} \text{ — (при поправках в логарифмы сторон).}$$

Преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы вида (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) и (10) обозначим соответственно

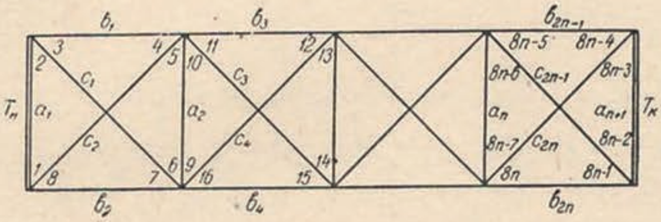

Схема линейно-углового ряда из геодезических квадратов, проложенного между сторонами с исходными дирекционными углами.

через $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, g_i, h_i$ и j, а коэффициенты весовой функции через f_α. Для определения веса уравненного дирекционного угла имеем:

$$\frac{1}{P_\alpha} = [f_\alpha f_\alpha] - \sum_{i=1}^{n} \frac{[a_i f_\alpha \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i \cdot (i-1)]} - \sum_{i=1}^{n} \frac{[b_i f_\alpha \cdot (n+i-1)]^2}{[b_i b_i \cdot (n+i-1)]} - \dots$$

Квадратичный коэффициент нормальных уравнений для весовой функции равен

$$[f_{\alpha_a} f_{\alpha_a}] = 1{,}5\, k, \tag{13}$$

$$[f_{\alpha_c} f_{\alpha_c}] = 0{,}75\,(2k-1). \tag{14}$$

Из решения нормальных уравнений получим требующиеся коэффициенты для определения веса уравненного дирекционного угла связующей стороны. Поскольку первые n уравнений независимы между собой, имеем

$$[a_1 a_1] = [a_2 a_2] = \dots = a_n a_n (n-1) = +2{,}0,$$

$$[a_i f_\alpha \cdot (k-1)]_{i-1}^{k} = -1, \; [a_i f_\alpha \cdot (i-1)]_{i-k+1}^{n} = 0.$$

Следовательно, суммарное влияние уравнений вида (3) на обратный вес равно

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{[a_i f_\alpha \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i \cdot (i-1)]} = +0{,}5\, k. \tag{15}$$

Обозначив для уравнений вида (4) и (5) исключенные квадратичные коэффициенты соответственно через η и ν

$$[b_i b_i \cdot (n+i-1)] = 1{,}5\delta^2 + 2q = \eta,$$

$$[c_i c_i \cdot (2n+i-1)] = 0{,}25\delta^2 + 1{,}5q = \nu$$

$\frac{m_s}{S}$	к	n					
		3		5		8	
		по формуле (21)	по схеме Гаусса	по формуле (21)	по схеме Гаусса	по формуле (21)	по схеме Гаусса
1 : 100 000	1	0,596	0,590	0,716	0,720	0,783	0,780
1 : 300 000		0,323	0,319	0,388	0,384	0,424	0,420
1 : 500 000		0,169	0,166	0,202	0,200	0,221	0,217
1 : 100 000	2	0,596	0,591	1,073	1,077	1,341	1,345
1 : 300 000		0,323	0,320	0,582	0,576	0,727	0,731
1 : 500 000		0,169	0,166	0,304	0,299	0,380	0,385
1 : 100 000	3			1,073	1,076	1,677	1,681
1 : 300 000				0,582	0,576	0,909	0,914
1 : 500 000				0,304	0,300	0,474	0,477
1 : 100 000	4					1,789	1,792
1 : 300 000						0,970	0,973
1 : 500 000						0,506	0,510

и учитывая, что

$$[b_i f_\alpha\cdot(n+i-1)]_{i=1}^{k} = -0{,}5\,\delta, \quad [b_i f_\alpha\cdot(n+i-1)]_{i=k+1}^{n} = 0;$$

$$[c_i f_\alpha\cdot(2n+i-1)]_{i=1}^{k} = -0{,}25\,\delta, \quad [c_i f_\alpha\cdot(2n+i-1)]_{i=k+1}^{n} = 0,$$

получим суммарное влияние этих уравнений в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{[b_i f_\alpha\cdot(n+i-1)]^2}{[b_i b_i\cdot(n+i-1)]} = \frac{0{,}25\,\delta^2}{\eta}\cdot k, \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{[c_i f_\alpha\cdot(2n+i-1)]^2}{[c_i c_i\cdot(2n+i-1)]} = \frac{0{,}0625\,\delta^2}{\nu}\cdot k. \tag{17}$$

Для уравнений (6) и весовой функции имеем:

$$[d_1 d_1\cdot 3n] = 2\delta^2 + 2q - 0{,}5\,\delta^2 = \frac{0{,}25\,\delta^4}{\eta} - \frac{q^2}{\eta} - \frac{0{,}25\,q^2}{\nu} =$$

$$= \frac{4q^3 + 9{,}375\,\delta^2 q^2 + 4{,}5\,\delta^4 q + 0{,}5\,\delta^6}{\eta\nu} = \frac{Y}{\eta\nu}.$$

Все последующие коэффициенты этого вида при любых значениях n и q, с ошибкой не более 1%, можно принять равными коэффициенту $[d_1 d_1\cdot 3n]$. Погрешность такого порядка практически не влияет на конечный результат, поэтому примем $[d_i d_i\cdot(3n+i-1)] = \frac{Y}{\eta\nu}$.

Аналогично погрешности того же порядка можно принять

$$[d_1 f_\alpha\cdot 3n] = [d_2 f_\alpha\cdot(3n+1)] = \cdots = (d_k f_\alpha\cdot(3n+k-1)] =$$

$$= -0{,}5\,\delta - \frac{0{,}25\,\delta^3}{\eta} - \frac{0{,}5\,\delta q}{\eta} - \frac{0{,}125\,\delta q}{\nu};$$

$$[d_{k+1} f_\alpha\cdot(3n+k)] = [d_{k+2} f_\alpha\cdot(3n+k+1)] = \cdots = [d_n f_\alpha\cdot(4n-1)] = 0.$$

Тогда суммарное влияние уравнений вида (6) на величину обратного веса функции дирекционного угла определится выражением

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{[d_i f_\alpha\cdot(3n+i-1)]^2}{[d_i d_i\cdot(3n+i-1)]} = \frac{0{,}5\,\delta^2}{(1{,}74\,\delta^2+q)}\cdot k. \tag{18}$$

весов $1/P_{\alpha_a}$ и $1/P_{\alpha_c}$

n					
3		5		8	
по формуле (22)	по схеме Гаусса	по формуле (22)	по схеме Гаусса	по формуле (22)	по схеме Гаусса
0,372	0,366	0,402	0,396	0,419	0,410
0,202	0,208	0,218	0,212	0,227	0,221
0,106	0,101	0,114	0,118	0,119	0,113
0,671	0,666	0,938	0,930	1,090	1,094
0,364	0,360	0,509	0,514	0,591	0,596
0,190	0,195	0,266	0,270	0,308	0,314
		1,118	1,112	1,537	1,544
		0,606	0,600	0,834	0,839
		0,316	0,309	0,435	0,440
				1,761	1,769
				0,955	0,962
				0,498	0,500

Первый квадратичный коэффициент уравнений (7) имеет вид

$$[e_1 e_1 \cdot 4n] = 0{,}625\,\delta^2 + 2q - \frac{0{,}0625\,\delta^4}{\eta} - \frac{q^2}{\nu} - \frac{\nu Y\,(2q^2 + 3\delta^2 q + \delta^4)}{\eta\,(Y^2 - 0{,}25\,\delta^4 q^2 \nu^2)}.$$

Все последующие квадратичные коэффициенты уравнений (7) стремятся к пределу, величина которого может быть найдена из выражения

$$[e_i e_i \cdot (4n + i - 1)] = e_{i-1} e_{i-1} \cdot (4n + i - 2) = \frac{0{,}5\,q^4\,(2q^2 + 3\delta^2 q + \delta^4)}{Y^2\,[e_{i-1} e_{i-1} \cdot (4n+i-2)]}.$$

Для практических целей эти коэффициенты с ошибкой 2—3% достаточно вычислять по формуле

$$[e_i e_i \cdot (4n + i - 1)] = \frac{(0{,}5\,\delta^2 + q)(2{,}10\,\delta^2 + q)(0{,}83\,\delta^2 + q)}{\eta\,(1{,}74\,\delta^2 + q)}.$$

Аналогично примем

$$[e_i f_\alpha \cdot (4n + i - 1)]_{i-1}^{k} = 0{,}5\,\delta + \frac{0{,}125\,\delta^3}{\eta} + \frac{0{,}25\,\delta q}{\nu} - \frac{3\delta\nu\,(2q^2 + 3\delta^2 q + \delta^4)}{4Y}.$$

Поэтому после ряда преобразований, суммируя для n членов, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{[e_i f_\alpha \cdot (4n + i - 1)]^2}{[e_i e_i \cdot (4n + i - 1)]} = \frac{\delta^2\,(3{,}96\,\delta^2 + q)^2 \cdot k}{25\,(1{,}74\,\delta^2 + q)(0{,}5\,\delta^2 + q)(2{,}10\delta^2 + q)}. \quad (19)$$

Коэффициент последнего элимационного уравнения надежно определяется следующим образом:

$$[jf_\alpha \cdot 7n] = \frac{q}{0{,}5\,\delta^2 + q} \cdot k,$$

а

$$\frac{[jf_\alpha \cdot 7n]}{[jj \cdot 7n]} = -\frac{k}{n},$$

следовательно,

$$\frac{[jf_\alpha \cdot 7n]^2}{[jj \cdot 7n]} = \frac{k^2}{n} \times \frac{q}{0{,}5\,\delta^2 + q}. \quad (20)$$

Зная (13), (15), (16), (17), (18), (19) и (20), можно вычислить величину обратного веса функции дирекционного угла связующей стороны в середине ряда:

$$\frac{1}{P_{\alpha_a}} = k\left\{1 - \frac{0{,}25\,\delta^2}{\eta} - \frac{0{,}0625\,\delta^2}{\nu} - \frac{0{,}5\,\delta^2}{1{,}74\,\delta^2 + q} - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta^2(3{,}96\,\delta^2 + q)^2}{25\,(1{,}74\,\delta^2 + q)(0{,}5\,\delta^2 + q)(2{,}10\,\delta^2 + q)}\right\} - \frac{q}{0{,}5\,\delta^2 + q}\cdot\frac{k^2}{n}.$$

После ряда преобразований получим

$$\frac{1}{P_{\alpha_a}} = \frac{kq}{(0{,}5\,\delta^2 + q)} - \frac{k^2 q}{n\,(0{,}5\,\delta^2 + q)} = \frac{q}{0{,}5\,\delta^2 + q}\times\frac{k\,(n-k)}{n}. \qquad (21)$$

Для случаев, когда определяется величина обратного веса функции дирекционного угла диагонали, формула (21) примет вид:

$$\frac{1}{P_{\alpha_c}} = \frac{q}{0{,}5\,\delta^2 + q}\times\frac{(2k-1)(2n-2k+1)}{4n}. \qquad (22)$$

Переходя к средним квадратическим ошибкам, получим

$$m_{\alpha_a} = m_\beta\sqrt{\frac{q}{0{,}5\,\delta^2 + q}\times\frac{k\,(n-k)}{n}}; \qquad (23)$$

$$m_{\alpha_c} = m_\beta\sqrt{\frac{q}{0{,}5\,\delta^2 + q}\times\frac{(2k-1)(2n-2k+1)}{4n}}. \qquad (24)$$

Проверка формул на теоретических моделях показала, что их можно применять для вычисления обратных весов функций дирекционных углов, для любых значений n при $1{:}100\,000 > \frac{m_s}{S} > 1{:}500\,000$. Результаты проверки приведены в таблице.

Рассмотрим влияние ошибок исходных дирекционных углов на ошибку функции дирекционного угла стороны в середине ряда. Среднюю квадратическую ошибку M функции, обусловленную ошибками исходных данных, можно определить по формуле

$$M^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial T_н}\right)^2 m^2_{T_н} + \left(\frac{\partial F}{\partial T_k}\right)^2 m^2_{T_k},$$

где m_{T_H} и m_{T_K} — средние квадратические ошибки исходных дирекционных углов T_H и T_K;

$$\frac{\partial F}{\partial T_н} = f_{T_H} + \frac{\partial w_\alpha}{\partial T_H}Q_1, \quad \frac{\partial F}{\partial T_K} = f_{T_K} + \frac{\partial w_\alpha}{\partial T_K}Q_1,$$

(здесь f_{T_H} и f_{T_K} — частные производные от функции по исходным данным; $\frac{\partial w_\alpha}{\partial T_H}$ и $\frac{\partial w_\alpha}{\partial T_K}$ — частные производные от свободных членов по исходным данным, а Q_1 — переходной коэффициент, определяемый по формуле

$$Q_1 = \frac{[jf_\alpha \cdot 7n]}{[jj \cdot 7n]} = -\frac{k}{n}.$$

Для нашего случая частные производные от свободных членов по исходным данным равны

$$\frac{\partial u_a}{\partial T_H} = +1, \ \frac{\partial w_a}{\partial T_K} = -1, \ f_{T_H} = +1, \ f_{T_K} = 0.$$

Исходя из этого, получим

$$M = \sqrt{\frac{(n-k)^2}{n^2} m_{T_H}^2 + \frac{k^2}{n^2} m_{T_K}^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Новосельская В. П. Точность цепи линейно-угловой триангуляции. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1964, вып. 1.

2. Проворов К. Л. Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1959, № 3.

Работа поступила 18 декабря 1972 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского ордена Ленина политехнического института.