УДК 528.35

Я. М. КОСТЕЦКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ НАКОПЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПОЛОЖЕНИЯ ПУНКТОВ В СПЛОШНЫХ СЕТЯХ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Точность положения пунктов обычно характеризуется величинами продольных и поперечных сдвигов. Для выявления закономерностей накопления ошибок в положении пунктов определялись зависимости между величинами сдвигов точек и удалением их от края сети. Такие зависимости получены для точек свободных сетей трилатерации, построенных из равносторонних треугольников. Средние квадратические сдвиги определялись по обратным весам, полученным по формуле

$$\frac{1}{P} = [ff] - \sum_{i=1}^{n} A_i, \tag{1}$$

где $[ff]$ — квадратичный член весовой функции сдвига; n — число условных уравнений, возникающих в сети; A_i — величина, вносимая в обратный вес i-м условным уравнением

$$A_i = \frac{[a_i f \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i (i-1)]}.$$

(Здесь числитель — преобразованный i-й коэффициент весовой функции, а знаменатель — преобразованный квадратичный коэффициент i-го условного уравнения).

Вначале расматривался ряд трилатерации, построенный из треугольников (рис. 1) Находились величины сдвигов точек диагоналей относительно левого конца диагонали. Точки каждой диагонали были пронумерованы слева направо, начиная с нуля. Поэтому номер точки K равен числу сторон диагонали, отделяющих точку от края сети. Весовая функция продольного сдвига K-й точки обеих диагоналей сети имеет вид:

$$F = \sum_{i=1}^{k} (c_i),$$

где (c_i) — поправка в i-ю сторону диагонали. Для весовой функции поперечного сдвига K-й точки первой сверху диагонали AB после замены поправок в углы через поправки в стороны и проведения простых преобразований получено

$$F_t = \frac{1}{\sqrt{3}} [-K(s_1) - 2(s_2) + 2(s_3) - 2(s_4) + \ldots + 2(s_{2k}) - 2(s_{2K+1}) +$$
$$+ 2K(c_1) + 2(K-1)(c_2) + 2(K-2)(c_3) + \ldots + 2(c_k) - (2K-1)(c_1') -$$
$$- (2K-3)(c_2') - \ldots - 3(c_{k-1}') - (c^k)].$$

Для второй диагонали

$$F_t = \frac{1}{\sqrt{3}}[(K-2)(s_1) + 2(s_2) - 2(s_3) + 2(c_4) - \ldots - 2(s_{2K-1}) + 2(s_{2K}) -$$
$$-(2K-1)(c_1) - (2K-3)(c_2) - \ldots - 3(c_{K-1}) - (c_K) + 2(K-1)(c_1') +$$
$$+ 2(K-2)(c_2') + \ldots + 2(c''_{K-1})],$$

где (s_i), (c_i) и (c_i') — поправки в стороны s_i, c_i и c_i'.

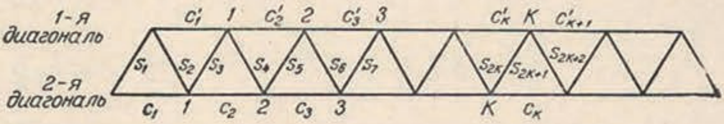

Рис. 1. Ряд трилатерации.

В свободном ряде трилатерации из треугольников не возникает условных уравнений, поэтому в формуле обратного веса (1) $\sum_{i=1}^{n} A_i = 0$, а вес продольного сдвига точки K обеих диагоналей

$$\frac{1}{P_u} = K. \tag{2}$$

Суммируя квадраты коэффициентов при поправках в стороны весовой функции поперечного сдвига K-й точки первой диагонали, получим

$$\frac{1}{P_t} = \frac{1}{9}(8K^3 + 9K^2 + 25K), \tag{3}$$

для второй диагонали

$$\frac{1}{P_t} = \frac{1}{9}(8K^3 + 3K^2 + 13K). \tag{4}$$

По обратным весам сдвигов, определенным по формулам (2), (3), (4), можно найти средние квадратические сдвиги по формуле:

$$m = \pm\mu\sqrt{\frac{1}{P}}, \tag{5}$$

где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Значения средних квадратических сдвигов точек $K=1, 2, \ldots, 10, 11$ первой и второй диагонали, вычисленные по формулам (2)—(5) при $\mu=6$ см, приведены в табл. 1.

Дальше исследовалось накопление ошибок в сетях трилатерации, состоящих из трех рядов треугольников. Такие сети представляют собой два взаимно перекрывающихся ряда шестилучевых центральных систем. Для исследований брались сети такой конфигурации, чтобы в каждом ряде имелось N центральных систем (рис. 2). При этом условии число возникающих в сети условных уравнений равно $2N$. Условные уравнения составлялись вначале для всех центральных систем первого сверху ряда, а затем для второго ряда. Дальше определялись значения числителей и знаменателей величин A, которые вносятся в обратные веса обеих функций. Оказалось, что закон образования как числителей и знаменателей, так и величин A для обеих функций очень сложный.

Таблица 1

Продольные и поперечные сдвиги точек одинарного и строенного рядов трилатерации при $N=10$

Число рядов в сети	Диагонали	K										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		Продольные сдвиги										
Один	первая	6,00	8,48	10,39	12,00	13,42	14,69	15,88	16,97	18,00	18,97	—
	вторая	6,00	8,48	10,39	12,00	13,42	14,69	15,88	16,97	18,00	18,97	19,90
Три	первая	5,63	7,70	9,24	10,52	11,66	12,69	13,65	14,54	15,40	16,28	—
	вторая	5,56	7,12	8,04	8,74	9,35	9,91	10,45	10,94	11,40	11,95	12,79
	третья	5,58	7,19	8,08	8,76	9,37	9,94	10,46	10,97	11,45	11,96	12,78
	четвертая	5,67	7,77	9,38	10,59	11,72	12,75	13,70	14,59	15,40	16,28	17,35
	по формуле (8)	5,97	7,81	9,29	10,56	11,69	12,72	13,67	14,57	15,41	16,21	16,97
	по формуле (9)	6,68	7,45	8,14	8,78	9,37	9,93	10,46	10,97	11,45	11,91	12,35
		Поперечные сдвиги										
Один	первая	12,96	12,49	38,57	54,99	73,49	89,93	115,93	139,60	164,75	191,32	—
	вторая	8,48	17,66	30,20	45,43	62,93	82,42	103,69	126,62	151,07	176,98	204,23
Три	первая	12,22	20,03	28,22	36,83	45,86	55,26	65,02	75,14	85,60	96,40	—
	вторая	7,96	15,64	23,75	32,20	41,07	50,32	59,93	69,91	80,21	90,85	101,84
	третья	8,07	15,61	24,05	32,93	42,19	51,80	61,78	72,08	82,72	93,68	104,95
	четвертая	12,25	20,03	28,25	36,91	45,99	55,41	65,22	75,38	85,96	96,82	108,07
	по формуле (10)	8,43	15,52	23,92	32,20	41,55	51,37	61,56	72,12	82,26	93,84	104,94

Но если соответствующим образом сгруппировать величины A по две, то легко можно найти закон образования $\sum\limits_{i=1}^{n} A$. В одну группу бралась одна величина A, вносимая в обратный вес одним из условных уравнений первого ряда центральных систем, и вторая величина A, вносимая одним из условных уравнений второго ряда центральных систем. Всех групп получится не более N, то есть не больше числа центральных систем в одном ряду.

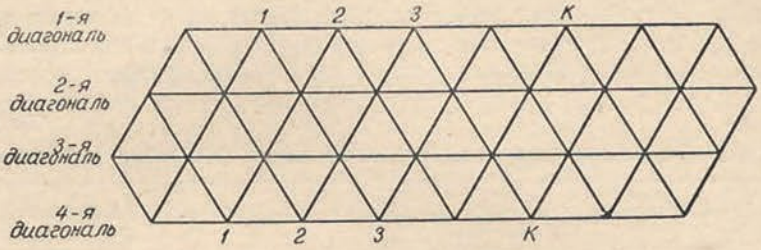

Рис. 2. Строенный ряд трилатерации.

Для функции продольного сдвига точки K к каждой i-й величине A прибавлялась величина A с индексом $2N-K+j-1$, то есть составлялись суммы $A_j+A_{2N-K+j-1}=u_j$, где j принимает значения от 1 до N. Благодаря тому, что все A с индексами от $N+1$ до $2N-K-1$ равны нулю, $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i=\sum\limits_{j=1}^{N} u_j$.

Значения ряда величин u_j для всех четырех диагоналей, начиная с верхней и кончая нижней, приведены в табл. 2. Они показывают, что $\sum\limits_{j=1}^{n} u_j$ для любой диагонали можно представить в виде линейной функции от номера точки K. Эти функции для первой, второй, третьей и четвертой диагоналей имеют соответственно вид:

$$\Sigma u_j=0{,}30K-0{,}276,\quad \Sigma u_j=0{,}70K-0{,}935,$$

$$\Sigma u_j=0{,}70K-0{,}941;\quad \Sigma u_j=0{,}30K-0{,}315.$$

Эти формулы точны при $9\leqslant K<N-1$. Они показывают, что Σu_j для точек первой и четвертой диагоналей, то есть для крайних диагоналей, почти одинаковы. С точностью до 0,02 для них можем записать

$$\sum_{j=1}^{N} u_j=0{,}30\,K-0{,}295. \tag{6}$$

Для точек диагоналей, расположенных в середине сети, с точностью до 0,005

$$\sum_{j=1}^{N} u_j=0{,}70\,K-0{,}940. \tag{7}$$

Подставляя в (1) значение квадратичного члена весовой функции и (6), получим значение обратного веса, а по нему и средний квадратический продольный сдвиг точек крайних диагоналей:

$$m_u=\pm\mu\sqrt{K-(0{,}30\,K-0{,}295)},$$

или

$$m_u=\pm\mu\sqrt{0{,}70\,K+0{,}295}. \tag{8}$$

Таким же путем получим формулу для среднего квадратического сдвига точек диагоналей, расположенных в середине сети:

$$m_u = \pm \mu \sqrt{0{,}30\,K + 0{,}940}. \qquad (9)$$

Формулы (8) и (9) дают значения продольных сдвигов точек $9 \leq K < N-1$. Для функции поперечного сдвига величины A группировались так:

$$A_j + A_{2N-j+1} = t_j.$$

Оказалось, что значения рядов величин t_j зависят в основном только от номера точки K. Практически на величину t_j не влияет положение в сети диагонали, на которой находится точка K. Для примера в табл. 2 при-

Таблица 2

Значение величин u_j и t_j для сети, состоящей из трех рядов треугольников

j	u_j				j	t_j	
	Диагонали					Диагонали	
	1-я	2-я	3-я	4-я		1-я	2-я
1	0,096	0,346	0,083	0,117	1	0,02	0,02
2	0,215	0,558	0,191	0,234	2	0,03	0,02
3	0,273	0,652	0,463	0,280	3	0,82	0,88
4	0,292	0,680	0,621	0,291	4	7,75	7,86
5	0,298	0,696	0,677	0,298	5	18,81	18,88
6	0,300	0,699	0,694	0,300	6	34,67	34,69
7	0,300	0,700	0,699	0,300	7	55,32	55,32
8	0,300	0,700	0,700	0,300	8	80,75	80,72
...	...	...	...	...	9	110,96	110,83
$K-2$	0,300	0,700	0,700	0,300	10	145,90	145,34
$K-1$	0,300	0,700	0,700	0,300	11	185,34	182,99
K	0,300	0,301	0,545	0,300	12	228,32	218,75
$K+1$	0,050	0,034	0,686	0,262	13	271,14	234,60
$K+2$	0,001	0	0	0	14	315,94	366,24
$K+3$	0	0	0	0	15	228,22	190,30

ведены значения t_j для точек $K=13$, находящихся на первой и третьей диагоналях. Ряд значений величин t_j для K-й точки получается близким к ряду аналогичных величин, входящих в обратный вес направления диагонали строенного ряда, в каждом сдвоенном ряде которого имеется $N=K-1$ центральных систем. Поэтому закон увеличения поперечного сдвига точек по мере удаления их от края сети можно приближенно выразить формулой для определения поперечного сдвига диагонали строенного ряда, выведенной в работе [1]. Для удобства заменим в этой формуле N через $K-1$. После этой подстановки и простых преобразований формула будет иметь вид:

$$m_t = \pm \mu \sqrt{0{,}00027201 K^5 - 0{,}0128056 K^4 + 0{,}27287\,K^3 + 0{,}6126 K^2 + 1{,}127 K}. \qquad (10)$$

Проведем таким же способом исследование закономерностей накопления погрешностей положения пунктов в сети трилатерации, построенной из пяти рядов треугольников. Ее можно представить как четыре взаимно перекрывающихся ряда центральных систем. Если число центральных систем в каждом ряду равно N, то в сети возникает $n=6N$ условных уравнений. В связи с тем, что закон образования величин A в такой сети сложный, и здесь эти величины группировались: по одной из каждого ряда центральных систем сети, то есть по четыре величины A.

Для функции продольного сдвига группирование проводилось так

$$A_j + A_{2N-K+j-1} + A_{2N+j} + A_{4N-K+j-1} = u_j,$$

а для функции поперечного сдвига

$$A_j + A_{2N-j+1} + A_{2N+j} + A_{4N-j+1} = t_j.$$

Ряды величин u_j и t_j имеют такие же свойства, как и в сетях трилатерации, состоящих из трех рядов треугольников. Суммы величин u_j также являются линейной функцией от номера точки, для которой определяется сдвиг. Эти линейные функции для точек диагоналей, равноудаленных от края сети, отличаются только свободными членами в пределах от 0,004 до 0,020. Поэтому с небольшой погрешностью можно принять значения $\sum\limits_{j=1}^{N} u_j$ для точек равноудаленных диагоналей одинаковыми. Используя полученные значения $\sum\limits_{j=1}^{N} u_j$ и значения квадратичных членов, получим формулы для среднего квадратического продольного сдвига точек первой и шестой диагоналей сети, то есть для крайних диагоналей

$$m_u = \pm \mu \sqrt{0{,}524\,K + 0{,}70,} \qquad (11)$$

для точек второй и пятой диагоналей

$$m_u = \pm \mu \sqrt{0{,}295\,K + 0{,}930} \qquad (12)$$

и для точек третьей и четвертой диагоналей

$$m_u = \pm \mu \sqrt{0{,}181\,K + 1{,}296.} \qquad (13)$$

Ряд значений величин t_j получается тоже близким к ряду таких же величин для функции направления диагонали сети трилатерации, состоящей из пяти рядов, и с $N = K - 1$. Поэтому приближенно закономерность накопления поперечных сдвигов точек можно выразить формулой, полученной для определения ошибок направления диагонали в [1], для удобства подставив в нее $N = K - 1$:

$$m_t = \pm \mu \sqrt{0{,}00029986K^5 - 0{,}0141996K^4 + 0{,}23205K^3 + 0{,}67626K^2 + 1{,}1056K.} \qquad (14)$$

Таким же путем было проведено исследование закономерностей накопления ошибок положения пунктов в сетях трилатерации, построенной из семи рядов. Для продольных сдвигов точек крайних диагоналей сети получена формула:

$$m_u = \pm \mu \sqrt{0{,}416\,K + 1{,}100.} \qquad (15)$$

Для точек второй и седьмой диагоналей:

$$m_u = \pm \mu \sqrt{0{,}273\,K + 1{,}042.} \qquad (16)$$

Для точек третьей и шестой диагоналей:

$$m_u = \pm \mu \sqrt{0{,}179\,K + 1{,}286} \qquad (17)$$

и для точек диагоналей, расположенных в середине сети, то есть четвертой и пятой:

$$m_u = \pm \mu \sqrt{0{,}130\,K + 1{,}546.} \qquad (18)$$

Формулы (15)—(18) дают значения m_u с точностью до 0,1 при $9 \leqslant K < N - 1$.

Для определения поперечного сдвига точек тоже воспользуемся формулой поперечного сдвига конца диагонали в сети трилатерации, построенной из семи рядов треугольников, полученной в [1]:

$$m_t = \pm\mu\sqrt{0{,}00030682K^5 - 0{,}014604K^4 + 0{,}22523K^3 + 0{,}68685K^2 + 1{,}101K}. \quad (19)$$

Для проверки полученных формул были определены величины сдвигов по весам, полученным попутно с уравниванием сети по способу условных измерений. Результаты проверки приведены в табл. 1, 3 и 4.

Таблица 3

Продольные сдвиги точек сетей, состоящих из трех, пяти и семи треугольников при $N=25$

Число рядов в сети	Диагонали	K							
		1	4	8	13	18	22	25	26
Три	первая	5,63	10,52	14,54	18,37	21,53	23,75	25,36	—
	вторая	5,56	8,78	10,96	13,20	15,10	16,48	17,46	18,03
	третья	5,66	8,77	10,97	13,20	15,11	16,48	17,47	18,04
	четвертая	5,69	10,58	14,59	18,41	21,56	23,78	25,36	26,12
	по формуле (8)	5,99	10,56	14,57	18,38	21,55	23,77	25,31	25,80
	по формуле (9)	6,68	8,78	10,97	13,20	15,10	16,48	17,43	17,74
Пять	первая	5,50	9,92	13,20	16,38	19,05	20,94	22,28	—
	вторая	5,56	8,67	10,86	13,08	14,97	16,32	17,31	17,91
	третья	5,61	8,45	9,94	11,47	12,80	13,79	14,61	15,22
	четвертая	5,38	8,42	9,92	11,45	12,79	13,78	14,93	15,10
	пятая	5,62	8,78	10,90	13,11	15,01	16,36	17,32	18,02
	шестая	5,68	10,10	13,36	16,51	19,16	21,04	22,26	23,26
	по формуле (11)	6,64	10,03	13,27	16,44	19,10	20,98	22,29	22,72
	по формуле (12)	6,64	8,72	10,88	13,10	14,99	16,34	17,29	17,60
	по формуле (13)	7,29	8,53	9,94	11,46	12,80	13,78	14,48	14,70
Семь	первая	5,60	9,72	12,50	15,20	17,50	19,15	20,68	—
	вторая	5,54	8,60	10,67	12,78	14,58	15,88	16,84	17,45
	третья	5,60	8,42	9,92	11,39	12,76	13,73	14,54	15,14
	четвертая	5,36	8,31	9,62	10,79	11,83	12,65	13,40	14,01
	пятая	5,57	8,38	9,65	10,80	11,84	12,62	13,39	14,01
	шестая	5,38	8,36	9,89	11,40	12,73	13,71	14,55	15,14
	седьмая	5,69	8,70	10,76	12,85	14,65	15,94	16,88	17,45
	восьмая	5,69	9,97	12,74	15,40	17,67	19,30	20,68	—
	по формуле (15)	7,39	9,97	12,63	15,31	17,59	19,21	20,35	20,71
	по формуле (16)	6,88	8,76	10,78	12,86	14,64	15,93	16,83	17,12
	по формуле (17)	7,26	8,49	9,88	11,40	12,74	13,72	14,40	14,62
	по формуле (18)	7,77	8,62	9,65	10,79	11,83	12,63	13,14	13,32

Формулы (8), (9) и (10) проверялись на двух сетях. Одна сеть была выбрана такой, чтобы в каждом сдвоенном ряде ее имелось 10 центральных систем, то есть $N=10$, и другая, в которой $N=25$. В первой сети определялись сдвиги всех точек, а во второй определялись сдвиги точек с номерами $K=1$, 4, 8, 13, 18, 22, 25 и 26 всех диагоналей.

В первой сети обратные веса определялись из решения 20 условных уравнений и 86 весовых функций. Результаты этих вычислений имеются в табл. 1. Во второй сети обратные веса были получены из решения 50 условных уравнений и 62 весовых функции. Эти результаты приведены в табл. 3 и 4.

Формулы (11), (14), выведенные для отображения закономерностей накопления погрешностей положения пунктов в сетях трилатерации, построенных из пяти рядов, проверялись на сети, в каждом сдвоенном ряду которой имеется 25 центральных систем. Для проверки решалась система из ста условных уравнений и 94 весовых функций. Для проверки формул (15)—(19) тоже определялись веса для сети, в каждом сдвоенном ряде которой имеется 25 центральных систем и в которой возникает 150 условных уравнений. К ним присоединялось 122 весовые функции. Решение этой системы уравнений было выполнено на машине Минск-22. Все результаты вычислений даны в табл. 3 и 4. Там приведены также значения сдвигов, вычисленные по формулам. Данные таблиц показывают, что полученные формулы правильно отображают закономерности накопления продольных и поперечных сдвигов. Ошибки всех формул не превышают 5—6%. Только формулы продольных сдвигов для точек, близких к краю сети, имеют бо́льшие погрешности. Для точек $K=1$ они достигают 20%.

Таблица 4

Поперечные сдвиги точек сетей, состоящих из трех, пяти и семи рядов треугольников при $N=25$

Число рядов в сети	Диагонали	K							
		1	4	8	13	18	22	25	26
Три	первая	12,26	36,83	75,14	130,63	193,52	248,67	292,25	—
	вторая	8,19	32,20	69,90	124,64	186,87	227,37	285,16	300,15
	третья	8,16	32,93	72,09	128,40	191,96	247,34	291,85	307,14
	четвертая	12,11	36,91	75,39	131,07	194,14	249,41	293,47	308,70
	по формуле (10)	8,43	32,20	72,12	127,69	187,81	242,14	289,53	307,06
Пять	первая	12,27	36,38	70,77	111,38	164,59	204,91	236,20	—
	вторая	7,86	32,01	66,33	113,72	159,83	201,14	231,00	241,61
	третья	8,06	31,83	65,92	111,08	158,82	198,52	229,78	240,03
	четвертая	11,08	36,22	71,12	117,18	165,77	206,38	237,80	248,48
	пятая	8,12	37,19	73,44	119,98	169,92	212,54	245,44	256,60
	шестая	12,24	36,53	71,56	117,79	166,69	207,52	240,34	250,01
	по формуле (14)	8,48	31,04	66,44	111,32	155,12	193,65	229,11	242,89
Семь	первая	12,19	36,36	70,18	113,69	158,40	194,98	222,91	—
	вторая	7,84	31,99	65,89	109,34	153,98	190,48	218,32	227,76
	третья	8,06	31,82	65,41	108,59	152,95	189,24	216,91	226,23
	четвертая	10,88	36,02	70,82	115,36	161,00	198,28	226,67	236,25
	пятая	7,91	31,52	65,29	108,63	153,13	189,52	217,26	226,60
	шестая	11,09	35,95	69,54	112,67	156,95	193,17	221,57	230,12
	седьмая	7,92	32,66	69,77	117,25	155,79	195,36	225,46	235,59
	восьмая	12,24	36,53	71,55	115,42	161,02	192,50	226,72	—
	по формуле (19)	8,48	30,83	65,29	107,74	147,42	181,70	213,87	226,63

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Накопление продольных сдвигов точек в сетях трилатерации проходит по линейному закону.

2. Накопление поперечных сдвигов точек проходит по параболическому закону. Обратный вес поперечного сдвига выражается многочленом пятой степени от номера точки.

3. Закономерности накопления сдвигов по мере удаления точки от края сети почти не зависят от величины сети, то есть от величины N. К такому выводу можно прийти сравнивая данные табл. 1 с данными табл. 3 и 4.

4. Величина продольного сдвига точек зависит не только от удаления точки от края сети, но и от положения в сети диагонали, на которой находится точка. Наиболее быстро накапливаются продольные сдвиги точек крайних диагоналей, а наиболее медленно — диагоналей, расположенных в середине сети. При этом по мере увеличения количества рядов в сети величины сдвигов равноудаленных точек диагоналей, расположенных в середине сети, выравниваются. Можно предположить, что в сетях с большим числом рядов продольные сдвиги точек всех диагоналей кроме двух крайних сверху и снизу, будут почти одинаковы.

5. Поперечные сдвиги точек зависят практически только от удаления их от края сети.

6. Проведенные исследования подтвердили, что поперечные сдвиги точек трилатерации намного больше продольных. В семикратном ряде поперечный сдвиг точек с номером $K=1$ в два раза больше продольного, а с номером 26 — в 15 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Костецкая Я. М. Определение поперечного сдвига диагонали ряда треугольников, находящегося в середине сплошной сети трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1969, вып. 8.

Работа поступила 22 ноября 1972 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского политехнического института.