УДК 528.35;621.385

А. С. КОЛОС

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПРИКАТОДНОЙ ОБЛАСТИ БЕСКРОССОВЕРНОЙ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

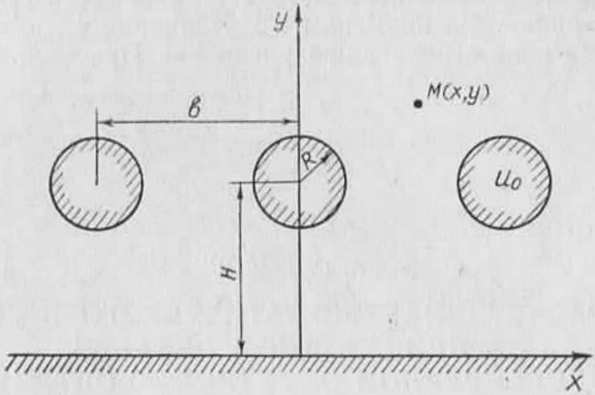
Основным конструктивным элементом электронно-лучевых приборов специального назначения является электронный прожектор, который служит для создания узкого сфокусированного электронного луча. В зависимости от назначения в ЭЛТ используются электронные прожекторы разнообразнейшей конструкции. Для повышения точности измерений в ЭЛТ, применяемых в геодезическом производстве, пятно от электронного пучка на экране должно быть наименьших размеров, четко очерчено, а интенсивность свечения пятна однородна и не уменьшаться резко до нуля на краях пятна. Это достигается путем применения так называемых бескроссоверных электронно-оптических систем, в которых для создания параллельного пучка электронов с равномерной плотностью тока в его сечении между катодом и модулятором расположен дополнительный электрод с небольшим положительным потенциалом. Электрод может выполняться в виде сетки параллельных проволочек круглого или прямоугольного сечения, шаг намотки, диаметр проволочек, расстояние до катода и потенциал которой подбирают экспериментально, в результате чего нет уверенности в оптимальном выборе всех этих величин.

Чтобы аналитически рассчитать их значение, необходимо знать траекторию электронов, для чего найти распределение электрического поля в прикатодном узле.

Цель настоящей работы — расчет данного электрического поля.

При выводе аналитических выражений для определения электрического поля в прикатодном узле бескроссоверной ЭОС сделаны следующие допущения: электрическое поле, создаваемое пространственным зарядом электронного луча в плоскости сетки, равно нулю, т. е. использовалось уравнение Лапласа; катод и сетка плоские и большой поверхности (по сравнению с размерами проволочек сетки).

Очевидно, эти допущения приводят к некоторой неточности, но в центральной, т. е. рабочей области катода расхождение должно быть небольшим.



Система электродов для нахождения электростатического поля.

Таким образом, для нахождения электростатического поля в прикатодном узле рассматривается система электродов, представленная на рисунке.

Для решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

используем метод Фурье — метод разделения переменных. Решение (1) запишем так:

$$U(x,\ y)=A(x)\cdot B(y). \qquad (2)$$

При подстановке (2) в (1) получаем

$$\frac{A''}{A}+\frac{B''}{B}=0; \quad A''+\lambda^2 A=0; \quad B''-\lambda^2 B=0,$$

где λ — постоянная разделения. Уравнение Лапласа имеет вид

$$U(x,y)=A\cdot B=(C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x)\,(C_3\,\mathrm{sh}\,\lambda y+C_4\,\mathrm{ch}\,\lambda\cdot y).$$

Для нахождения постоянных интегрирования и постоянной разделения используем граничные условия и периодичность поля:

а) если $x=x_0+pb$, где $p=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, то $A(x+pb)\lambda=$ $=A(x\lambda)$, что возможно в случае $\lambda pB=2\pi n$, отсюда $\lambda=2\pi n/b$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

б) если $y=0$, то $U=0$, отсюда $C_4=0$;

в) электрическое поле симметрично относительно оси Y, если $C_1=0$;

г) сумма частных решений — также решение уравнения, поэтому получаем

$$U=U_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\cos 2\pi n\frac{x}{b}\,\mathrm{sh}\,2\pi n\frac{y}{b}. \tag{3}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов C_n используем второе граничное условие: когда точка $M(x, y)$ находится на круге $(x-nB)^2+(y-H)^2=R^2$, то $U=U_0$. Вводим обозначения $2\pi \frac{R}{B}=r$, $2\pi\frac{H}{B}=h$, $x=R\cdot\cos\varphi$, $y=H+R\sin\varphi$.

При $U=U_0$

$$U_0=U_0\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n\cdot\cos(r\cdot n\cdot\cos\varphi)\cdot\mathrm{sh}\left(r\cdot n\frac{H}{R}+r\cdot n\cdot\sin\varphi\right),$$

$$1=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\cdot\cos(rn\cos\varphi)\left[\mathrm{sh}\left(r\cdot n\frac{H}{R}\right)\mathrm{ch}(r\cdot n\cdot\sin\varphi)+\right.$$

$$\left.+\,\mathrm{ch}\left(r\cdot n\frac{H}{R}\right)\cdot\mathrm{sh}(r\cdot n\cdot\sin\varphi)\right].$$

Обозначим

$$\mathrm{sh}\left(r\cdot n\frac{H}{R}\right)=B_n,\ \mathrm{ch}\left(r\cdot n\frac{H}{R}\right)=A_n.$$

Таким образом,

$$1=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\cdot\cos(r\cdot n\cdot\cos\varphi)\left[A_n\cdot\mathrm{sh}(r\cdot n\cdot\sin\varphi)+B_n\cdot\mathrm{ch}(r\cdot n\cdot\sin\varphi)\right].$$

Так как

$$\cos(r\cdot n\cdot\cos\varphi)=J_0(r\cdot n)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(r\cdot n)\cos 2k\varphi,$$

$$\mathrm{sh}(r\cdot n\cdot\sin\varphi)=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} I_{2k-1}(r\cdot n)\sin(2k-1)\varphi,$$

$$\mathrm{ch}(r\cdot n\cdot\sin\varphi)=I_0(r\cdot n)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k I_{2k}(r\cdot n)\cos 2k\varphi,$$

то C_n определяем

$$1=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\left[2A_nJ_0(r\cdot n)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}I_{2k-1}(r\cdot n)\sin(2k-1)\varphi+\right.$$

$$+ B_n I_0(r\cdot n) J_0(r\cdot n) + 2B_n J_0(r\cdot n) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(r\cdot n)\cos 2k\varphi +$$

$$+ 4A_n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(r\cdot n)\cos 2k\varphi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} I_{2k-1}(r\cdot n)\times$$

$$\times \sin(2k-1)\varphi + 2B_n I_0(r\cdot n) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(r\cdot n)\cos 2k\varphi +$$

$$+ 4B_n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(r\cdot n)\cos 2k\varphi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(r\cdot n)\cos 2k\varphi\,].$$

Как видим,

$$2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(r\cdot n)\cos 2k\varphi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} I_{2k-1}(r\cdot n)\sin(2k-1)\varphi =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\sum_{m=0}^{k} I_{2m+1}(r\cdot n) J_{2(k-m)}(r\cdot n) - I_{2k+1}(r\cdot n) J_0(r\cdot n) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} (I_{2m+1}(r\cdot n) J_{2m+2k+2}(r\cdot n) + I_{2k+2m+3}(r\cdot n)\cdot J_{2m+2}(r\cdot n))]\times$$

$$\times \sin(2k+1)\varphi,$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(r\cdot n)\cos 2k\varphi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(r\cdot n)\cos 2k\varphi =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k} + 2(r\cdot n) J_{2k+2}(r\cdot n) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [\sum_{m=0}^{k} I_{2m+2}(r\cdot n)\times$$

$$\times J_{2k-2m}(r\cdot n) - I_{2k+2}(r\cdot n) J_0(r\cdot n) + \sum_{m=0}^{\infty} (I_{2m+2}(r\cdot n)\times$$

$$\times J_{2m+2k+4}(r\cdot n) + I_{2m+2k+4}(r\cdot n) J_{2m+2}(r\cdot n)]\cos(2k+2)\varphi.$$

Окончательно получаем

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \{[B_n J_0(r\cdot n) I_0(r\cdot n) + 2B_n \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k+2}(r\cdot n) J_{2k+2}(r\cdot n) +$$

$$+ 2A_n \{J_0(r\cdot n) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k I_{2k+1}(r\cdot n) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\sum_{m=0}^{k} I_{2m+1}(r\cdot n)\times$$

$$\times J_{2(k-m}(r\cdot n) - I_{2k+1}(r\cdot n) J_0(r\cdot n) + \sum_{m=0}^{\infty} (I_{2m+1}(r\cdot n) J_{2m+2k+2}(r\cdot n) +$$

$$+ I_{2k+2m+3}(r\cdot n) J_{2m+2}(r\cdot n)]\}\sin(2k+1)\varphi +$$

$$+2B_n\{J_0(r\cdot n)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}I_{2k+2}(r\cdot n)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}[\sum_{m=0}^{k}I_{2m+2}\times$$

$$\times(r\cdot n)J_{2k-2m}(r\cdot n)-I_{2k+2}(r\cdot n)J_0(r\cdot n)+\sum_{m=0}^{\infty}(I_{2m+2}(r\cdot n)\times$$

$$\times J_{2m+2k+1}(r\cdot n)+I_{2m+2k+1}(r\cdot n)J_{2m+2}(r\cdot n))]\}\cos(2k+2)\varphi]\}.$$

Это равенство выполняется при любом угле в том случае, когда коэффициенты при тригонометрических функциях равняются нулю:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}C_n\{B_n[J_0(r\cdot n)I_0(r\cdot n)+2\sum_{k=0}^{\infty}I_{2k+2}(r\cdot n)J_{2k+2}(r\cdot n)]\}=1,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}A_nC_n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[\sum_{m=0}^{k}I_{2m+1}(r\cdot n)J_{2k-2m}(r\cdot n)+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}(I_{2m+1}(r\cdot n)J_{2m+2k+2}(r\cdot n)+I_{2k+2m+3}(r\cdot n)J_{2m+2}(r\cdot n))]=0,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}C_nB_n\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}[I_0(r\cdot n)J_{2k+2}(r\cdot n)+\sum_{m=0}^{k}I_{2m+2}(r\cdot n)\times$$

$$\times J_{2k-2m}(r\cdot n)+\sum_{m=0}^{\infty}(I_{2m+2}(r\cdot n)J_{2m+2k+4}(r\cdot n)+$$

$$+I_{2m+2k+4}(r\cdot n)J_{2m+2}(r\cdot n))]=0.$$

В эти уравнения входят бесконечные ряды произведений Бесселевых функций первого рода от действительного и мнимого аргумента. При разложении этих функций в ряды получаем

$$I_0(x)J_0(x)+2\sum_{m=0}^{\infty}I_{2m+2}(x)J_{2m+2}(x)=1,$$

$$\sum_{m=0}^{k}I_{2m+1}(x)J_{2k-2m}(x)+\sum_{m=0}^{\infty}(I_{2m+1}(x)J_{2k+2m+2}(x)+$$

$$+I_{2k+2m+3}(x)J_{2m+2}(x)=\frac{x^{2k+1}}{2(2k+1)!},$$

$$I_0(x)\cdot J_{2k+2}(x)+\sum_{m=0}^{k}I_{2m+2}(x)\cdot J_{2k-2m}(x)+\sum_{m=0}^{\infty}(I_{2m+2}(x)\times$$

$$\times J_{2m+2k+4}(x)+I_{2m+2k+4}(x)\cdot J_{2m+2}(x))=\frac{x^{2k+1}}{2(2k+2)!}.$$

Используя полученные выше соотношения, уравнения для определения неизвестных коэффициентов C_n имеют вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot B_n = 1,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n A_n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(r\cdot n)^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \sin(2k+1)\varphi = 0,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot B_n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(r\cdot n)^{2k+2}}{(2k+2)!} \cdot \cos(2k+2)\varphi = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при тригонометрических функциях нулю, получаем

$$\cdots + C_{-3} B_{-3} + C_{-2} \cdot B_{-2} + C_{-1} \cdot B_{-1} + C_0 B_0 + C_1 B_1 + \\ + C_2 B_2 + C_3 B_3 + \cdots = 1,$$

$$\cdots - (3r) C_{-3} A_{-3} - (2r) C_{-2} A_{-2} - (1r) C_{-1} A_{-1} + (0r) A_0 \cdot C_0 + \\ + (1r) C_1 A_1 + (2r) A_2 C_2 + (3r) C_3 A_3 + \cdots = 0,$$

$$\cdots + (3r)^2 C_{-3} B_{-3} + (2r)^2 C_{-2} B_{-2} + (1r)^2 C_{-1} B_{-1} + (0r)^2 C_0 B_0 + \\ + (1r)^2 C_1 B_1 + (2r)^2 C_2 B_2 + (3r)^2 C_3 B_3 + \cdots = 0,$$

$$\cdots - (3r)^3 C_{-3} A_{-3} - (2r)^3 C_{-2} A_{-2} - (1r)^3 C_{-1} A_{-1} + \\ + (0r)^3 C_0 A_0 + (1r)^3 C_1 A_1 + (2r)^3 C_2 A_2 + (3r)^3 C_3 A_3 + \cdots = 0.$$

. . . .

Просуммируем попарно строчки:

$$\cdots + (B_{-2} - 2r A_{-2}) C_{-2} + (B_{-1} - 1rA_{-1}) C_{-1} + (B_0 - 0rA_0) C_0 + \\ + (B_1 + 1rA_1) C_1 + (B_2 + 2rA_2) C_2 + \cdots = 1,$$

$$\cdots + (2r)^2 (B_{-2} - 2rA_{-2}) C_{-2} + (1r)^2 (B_{-1} - 1rA_{-1}) C_{-1} + \\ + (0r)^2 (B_0 - 0rA_0) C_0 + (1r)^2 (B_1 + 1rA_1) C_1 + \\ + (2r)^2 (B_2 + 2rA_2) C_2 + \cdots = 0,$$

$$\cdots + (2r)^4 (B_{-2} - 2rA_{-2}) C_{-2} + (1r)^4 (B_{-1} - 1rA_{-1}) C_{-1} + \\ + (0r)^4 (B_0 - 0rA_0) C_0 + (1r)^4 (B_1 + 1rA_1) C_1 + \\ + (2r)^4 (B_2 + 2rA_2) C_2 + \cdots = 0.$$

. . . .

Сгруппировав попарно члены в каждой строчке и учитывая, что $B_0=0$, $B_{-n}=-B_n$, $A_{-n}=+A_n$, имеем

$$(B_1 + 1rA_1)(C_1 - C_{-1}) + (B_2 + 2rA_2)(C_2 - C_{-2}) + \\ + (B_3 + 3rA_3)(C_3 - C_{-3}) + \cdots = 1,$$

$$(1r)^2 (B_1 + 1rA_1)(C_1 - C_{-1}) + (2r)^2 (B_2 + 2rA_2)(C_2 - C_{-2}) + \\ + (3r)^2 (B_3 + 3rA_3)(C_3 - C_{-3}) + \cdots = 0,$$

$$(1r)^4 (B_1 + 1rA_1)(C_1 - C_{-1}) + (2r)^4 (B_2 + 2rA_2)(C_2 - C_{-2}) + \\ + (3r)^4 (B_3 + 3rA_3)(C_3 - C_{-3}) + \cdots = 0,$$

. . . .

Обозначая $(B_n+nrA_n)\cdot(C_n-C_{-n})=x_n$, получаем такую систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестной x_n:

$$
\begin{gathered}
x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots=1,\\
1^2x_1+2^2x_2+3^2x_3+4^2x_4+\cdots=0,\\
1^4x_1+2^4x_2+3^4x_3+4^4x_4+\cdots=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

или в матричной форме

$$
\begin{Vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1\cdots\\
1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2\cdots\\
1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4\cdots\\
1^6 & 2^6 & 3^6 & 4^6 & 5^6\cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{Vmatrix}
\cdot
\begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ \vdots\end{Vmatrix}
=
\begin{Vmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ \end{Vmatrix}
$$

Для решения этого матричного уравнения необходимо найти детерминант и дополнения бесконечной матрицы. Это матрица Ван-ден-Монда.

Обратную матрицу Ван-ден-Монда определяем используя то, что значение детерминанта не изменится, если к некоторому столбцу (строчке) прибавить второй (вторую), умноженный на постоянное число:

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1\cdots\\
1 & 2^2 & 3^2 & 4^2\cdots\\
1 & 2^4 & 3^4 & 4^4\cdots\\
1 & 2^6 & 3^6 & 4^6\cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{vmatrix}
\prod_{n=2}^{\infty}\prod_{k=0}^{\infty}[(n-k)-(k+1)^2]=\infty;
$$

$$
A_{1k}=(-1)^{1+k}
\begin{vmatrix}
1 & 2^2 & 3^2\cdots(k-1)^2 & (k+1)^2\cdots\\
1 & 2^4 & 3^4\cdots(k-1)^4 & (k+1)^4\cdots\\
1 & 2^6 & 3^6\cdots(k-1)^6 & (k+1)^6\cdots\\
1 & 2^8 & 3^8\cdots(k-1)^8 & (k+1)^8\cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots\qquad\vdots & \vdots
\end{vmatrix}
=
$$

$$
=(-1)^{k+1}\frac{\prod\limits_{n=2}^{\infty}\prod\limits_{p=1}^{\infty}n^2[(n+p-1)^2-p^2]}{\prod\limits_{p=0}^{k=1}(k^2-p^2)\cdot\prod\limits_{p=k+1}^{\infty}(p^2-k^2)};
$$

$$
A_{1k}:D=2(-1)^{k+1}.
$$

Таким образом, определяем коэффициенты

$$C_n - C_{-n} = (-1)^{k+1} \frac{2}{B_n + nr \cdot A_n} = (-1)^{k+1} \frac{2}{\operatorname{sh} rn \frac{H}{R} + nr \operatorname{ch} rn \frac{H}{R}}.$$

В результате получаем решение уравнений Лапласа для рассматриваемого случая:

$$U = 2U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n \frac{x}{b} \operatorname{sh} 2\pi n \frac{y}{b}}{\operatorname{sh} \cdot 2\pi n \frac{H}{b} + 2\pi n \frac{R}{b} \operatorname{ch} 2\pi n \frac{H}{b}}.$$

Статья поступила в редколлегию 24. 12. 83