

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-УГЛОВЫХ ЗАСЕЧЕК

Автономные методы определения положения геодезических пунктов, широко применяемые на практике, дают значительный экономический эффект. Линейные, прямые и обратные угловые засечки и их комбинации используют при производстве привязочных, съемочных и разбивочных работ, при исполнительной съемке и наблюдениях за деформациями инженерных сооружений. Измерение расстояний между определяемыми пунктами повышает точность угловых засечек и дает возможность построить различные схемы линейно-угловых засечек (ЛУЗ). В литературе вопрос о точности ЛУЗ освещен недостаточно полно, а решение ЛУЗ трех пунктов Т. Кляйнера [4] громоздко и неудобно для применения. В данной работе дается общее решение ЛУЗ (рис. 1) с оценкой точности определения положения искомым пунктам.

Рассмотрим решение ЛУЗ (рис. 1, а), в которых измерены горизонтальные углы $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и β_4 на определяемых пунктах p_1, p_2, p_3 и расстояния между ними s_1 и s_2 . Длины a_i и дирекционные углы α_i сторон между i исходными и p_i определяемыми пунктами

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{s_1 \sin \beta_2 - b_1 \sin \delta_2}{\sin (\beta_1 + \beta_2)} \\ \alpha_1 &= \alpha_{1-2} + \delta_1 \end{aligned} \right\}; \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{s_1 \sin \beta_1 - b_1 \sin \delta_1}{\sin (\beta_1 + \beta_2)} = \frac{s_2 \sin \beta_4 - b_2 \sin \delta_4}{\sin (\beta_3 + \beta_4)} \\ \alpha_2 &= \alpha_{2-1} - \delta_2 = \alpha_{2-3} + \delta_3 \end{aligned} \right\}; \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= \frac{s_2 \sin \beta_3 - b_2 \sin \delta_3}{\sin (\beta_3 + \beta_4)} \\ \alpha_3 &= \alpha_{3-2} - \delta_4 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где α_{i-j} — дирекционные углы сторон между i и j исходными пунктами; b_1 и b_2 — расстояния между исходными пунктами 1-2 и 2-3; δ_i — горизонтальные углы при исходных пунктах.

При определении расстояний a_i использованы формулы для вычисления сторон четырехугольников без диагоналей [2]. Угол δ_4 найдем из формул (2), для чего преобразуем их к виду

$$s_1 \sin \beta_1 - b_1 \sin \delta_1 - s_2 \sin \beta_4 \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin(\beta_3 + \beta_1)} + b_2 \sin \delta_4 \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin(\beta_3 + \beta_4)} = 0; \quad (4) \quad \delta_2 + \delta_3 = \alpha_{2-1} - \alpha_{2-3}. \quad (5)$$

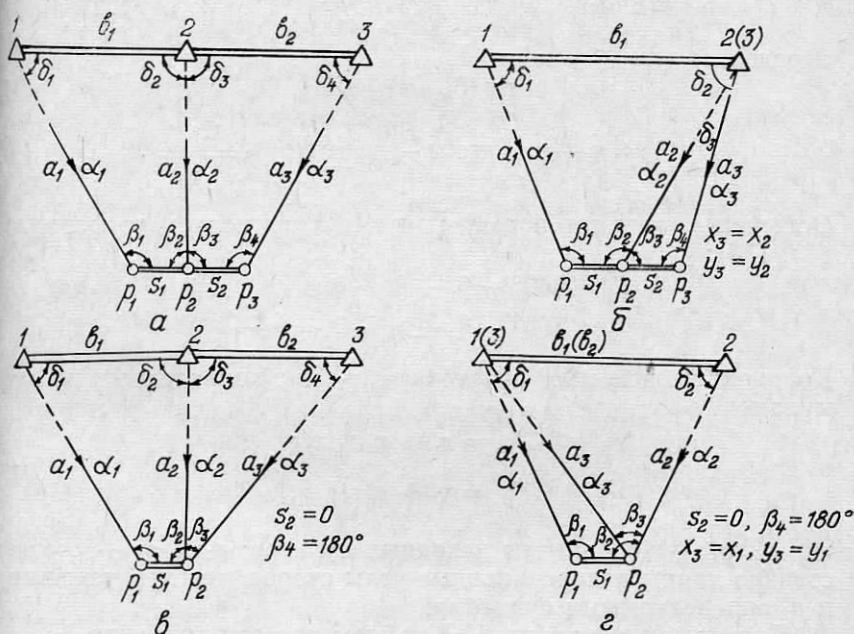


Рис. 1. Схемы линейно-угловых засечек.

Обозначим

$$k = \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin(\beta_3 + \beta_4)}; \quad (6) \quad \omega = \alpha_{2-1} - \alpha_{2-3} \quad (7)$$

и из равенства $\sum_{i=1}^4 \beta_i + \sum_{i=1}^4 \delta_i = 720^\circ$ получим

$$\delta_4 = \theta - \delta_1, \quad (8) \quad \text{где } \theta = 720^\circ - \sum_{i=1}^4 \beta_i - \omega. \quad (9)$$

С учетом уравнений (6) и (8) формула (4) примет вид

$$(b_1 + b_2 k \cos \theta) \sin \delta_1 - b_2 k \sin \theta \cos \delta_1 - s_1 \sin \beta_1 + s_2 k \sin \beta_4 = 0. \quad (10)$$

Полагая, что

$$\left. \begin{aligned} A &= b_1 + b_2 k \cos \theta; \\ B &= b_2 k \sin \theta; \\ C &= s_1 \sin \beta_1 - s_2 k \sin \beta_4, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

получаем уравнение

$$A \sin \delta_1 - B \cos \delta_1 - C = 0. \quad (12)$$

Разделив его на $\sqrt{A^2 + B^2}$ и приняв, что

$$\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \sin \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (13)$$

определим

$$\sin(\delta_1 - \varphi) = \sin \gamma, \quad (14)$$

откуда

$$\delta_1 = \varphi + \gamma = \arctg \frac{B}{A} + \arcsin \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (15)$$

Остальные углы при исходных пунктах вычисляем по формулам (8), (16):

$$\left. \begin{aligned} \delta_2 &= 360^\circ - \beta_1 - \beta_2 - \delta_1; \\ \delta_3 &= 360^\circ - \beta_3 - \beta_4 - \delta_4 = \omega - \delta_2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Координаты искомых пунктов p_1 , p_2 и p_3 определяем по формулам

$$\left. \begin{aligned} X_{p_i} &= x_i + a_i \cos \alpha_i; \\ Y_{p_i} &= y_i + a_i \sin \alpha_i, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где x_i , y_i — координаты исходных пунктов; a_i и α_i — соответственно длины и дирекционные углы сторон между i исходными и p_i определяемыми пунктами.

Для оценки точности ЛУЗ найдем погрешность угла δ_1 :

$$m_{\delta_1} = \rho'' \sqrt{F_A^2 m_A^2 + F_B^2 m_B^2 + F_C^2 m_C^2}, \quad (18)$$

где $\rho'' = 206265''$ — число секунд в радиане.

Частные производные F_A , F_B и F_C от функции (15) по аргументам A , B и C вычисляем по формулам

$$\left. \begin{aligned} F_A &= -\frac{1}{A} \frac{\cos \varphi}{\cos \gamma} \sin \delta_1; \\ F_B &= \frac{1}{A} \frac{\cos \varphi}{\cos \gamma} \cos \delta_1; \\ F_C &= \frac{1}{A} \frac{\cos \varphi}{\cos \gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

По известной методике определения погрешности функций измеренных величин найдем погрешности вычисления A , B и C (11), считая аргументами измеренные углы β_1 , β_2 , β_3 , β_4 и расстояния s_1 и s_2 :

$$m_A = \sqrt{2} b_2 k \frac{m_\beta''}{\rho''} \sqrt{\frac{\cos^2 [\theta - (\beta_1 + \beta_2)]}{\sin^2 (\beta_1 + \beta_2)} + \frac{\cos^2 [\theta + (\beta_3 + \beta_4)]}{\sin^2 (\beta_3 + \beta_4)}}; \quad (20)$$

$$m_B = \sqrt{2} b_2 k \frac{m_\beta''}{\rho''} \sqrt{\frac{\sin^2 [\theta - (\beta_1 + \beta_2)]}{\sin^2 (\beta_1 + \beta_2)} + \frac{\sin^2 [\theta + (\beta_3 + \beta_4)]}{\sin^2 (\beta_3 + \beta_4)}}; \quad (21)$$

$$m_C = \sqrt{\{[s_1 \cos \beta_1 - N \operatorname{ctg} (\beta_1 + \beta_2)]^2 + N^2 \operatorname{ctg}^2 (\beta_1 + \beta_2) + N^2 \operatorname{ctg}^2 (\beta_3 + \beta_4) + [k s_2 \cos \beta_4 - N \operatorname{ctg} (\beta_3 + \beta_4)]^2\} \times \frac{m_\beta^2}{\rho^2} + (M^2 + N^2) \left(\frac{m_s}{s}\right)^2}, \quad (22)$$

где $M = s_1 \sin \beta_1$; $N = s_2 k \sin \beta_4$; m_β'' (23) — погрешность измерения углов; m_s/s — относительная погрешность измерения расстояний s_1 и s_2 .

Анализ полученных формул (19), (20), (21) и (22) показывает, что: а) при $(\beta_1 + \beta_2) = 180^\circ$ или $(\beta_3 + \beta_4) = 180^\circ$ ЛУЗ не имеет решения; б) при $\gamma = 0^\circ$ $F_A = \min$, $F_B = \min$, $F_C = \min$; в) при $(\beta_1 + \beta_2) = (\beta_3 + \beta_4) = 270^\circ$ $m_A = \min$, $m_B = \min$, $m_C = \min$.

Для практического использования формул (20), (21) и (22) введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{\cos [\theta - (\beta_1 + \beta_2)]}{\sin (\beta_1 + \beta_2)}; & T_2 &= \frac{\cos [\theta + (\beta_3 + \beta_4)]}{\sin (\beta_3 + \beta_4)}; \\ T_3 &= \frac{\sin [\theta - (\beta_1 + \beta_2)]}{\sin (\beta_1 + \beta_2)}; & T_4 &= \frac{\sin [\theta + (\beta_3 + \beta_4)]}{\sin (\beta_3 + \beta_4)}; \\ T_5 &= \sqrt{[\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} (\beta_1 + \beta_2)]^2 + \operatorname{ctg}^2 (\beta_1 + \beta_2)}; \\ T_6 &= \sqrt{[\operatorname{ctg} \beta_4 - \operatorname{ctg} (\beta_3 + \beta_4)]^2 + \operatorname{ctg}^2 (\beta_3 + \beta_4)}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

С учетом уравнений (19) и (24) погрешность определения угла δ_1

$$m_{\delta_1} = \frac{\rho''}{A \cos \gamma} \sqrt{m_A^2 \sin^2 \delta_1 + m_B^2 \cos^2 \delta_1 + m_C^2}, \quad (25)$$

где

$$m_A = \sqrt{2} b_2 k \frac{m_\beta''}{\rho''} \sqrt{T_1^2 + T_2^2}; \quad m_B = \sqrt{2} b_2 k \frac{m_\beta''}{\rho''} \sqrt{T_3^2 + T_4^2};$$

$$m_C \approx N \sqrt{(T_5^2 + T_6^2) \frac{m_\beta^2}{\rho^2} + 2 \left(\frac{m_s}{s}\right)^2}. \quad (26)$$

Величины T_1^2 , T_2^2 , T_3^2 и T_4^2 определяем графически по соответствующей им сумме углов $z = (\beta_1 + \beta_2)$ или $z = (\beta_3 + \beta_4)$ (рис. 2), для чего в зависимости от значения угла Θ по таблице находим номер кривой и аргумент z_1 или z_2 . Например, при $\Theta = 60^\circ$ T_1^2 определяется по кривой 4 и аргументу z_1 , а T_2^2 — по кривой 4 и аргументу z_2 . При $(\beta_1 + \beta_2) = (\beta_3 + \beta_4) = 255^\circ$ $T_1^2 = 1,0$, а $T_2^2 = 0,5$ (рис. 2). Если угол Θ не соответствует табличным значениям, то величины T_i^2 ($i = 1, 2, 3, 4$) определяются интерполированием.

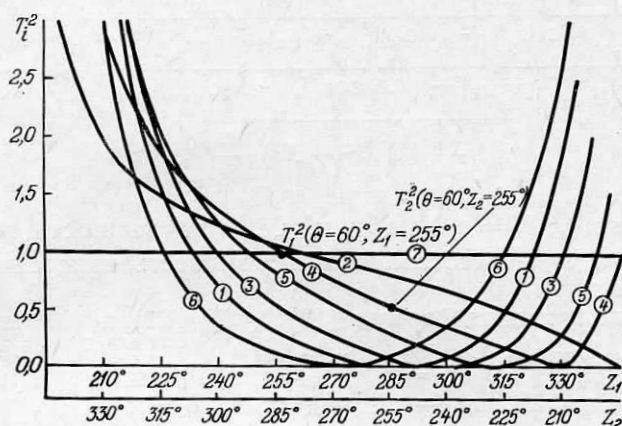


Рис. 2. График изменения величин T_1^2 , T_2^2 , T_3^2 и T_4^2

Величины T_5^2 и T_6^2 определяем по соответствующим им аргументам $\beta_i = \beta_1$ или β_4 и $z = (\beta_1 + \beta_2)$ или $(\beta_3 + \beta_4)$ (рис. 3). Например, при $\beta_1 = 120^\circ$, $z = (\beta_1 + \beta_2) = 255^\circ$, $T_5^2 = 0,8$.

Определение коэффициентов T_1^2 , T_2^2 , T_3^2 и T_4^2

Коэффициент	$\Theta = 30^\circ$		$\Theta = 45^\circ$		$\Theta = 60^\circ$		$\Theta = 75^\circ$		$\Theta = 90^\circ$		$\Theta = 105^\circ$		$\Theta = 120^\circ$		$\Theta = 135^\circ$		$\Theta = 150^\circ$		$\Theta = 165^\circ$	
	кривая	z	кривая	z	кривая	z	кривая	z_1	кривая	z	кривая	z	кривая	z	кривая	z	кривая	z	кривая	z
T_1^2	3	1	5	1	4	1	2	1	7	1	2	2	4	2	5	2	3	2	1	2
T_2^2	3	2	5	2	4	2	2	2	7	1	2	1	4	1	5	1	3	1	1	1
T_3^2	4	2	5	2	3	2	1	2	6	1	1	1	3	1	5	1	4	1	2	1
T_4^2	4	1	5	1	3	1	1	1	6	1	1	2	3	2	5	2	4	2	2	2

В частных случаях ЛУЗ погрешность m_c может вычисляться по формулам: а) при $\beta_1 = 180^\circ$

$$m_c = N \sqrt{\left\{ \left[\frac{s_1}{N} - \operatorname{ctg} \beta_2 \right]^2 + \operatorname{ctg}^2 \beta_2 + T_6^2 \right\} \frac{m_\beta^2}{\rho^2} + \left(\frac{m_s}{s} \right)^2}; \quad (27)$$

б) при $\beta_4 = 180^\circ$

$$m_c = \sqrt{(s_1^2 \cos^2 \beta_1 + k^2 s_2^2) \frac{m_\beta^2}{\rho^2} + M^2 \left(\frac{m_s}{s} \right)^2}; \quad (28)$$

в) при $\beta_1 = \beta_4 = 180^\circ$

$$m_c = \frac{m_\beta''}{\rho''} \sqrt{s_1^2 + k^2 s_2^2}. \quad (29)$$

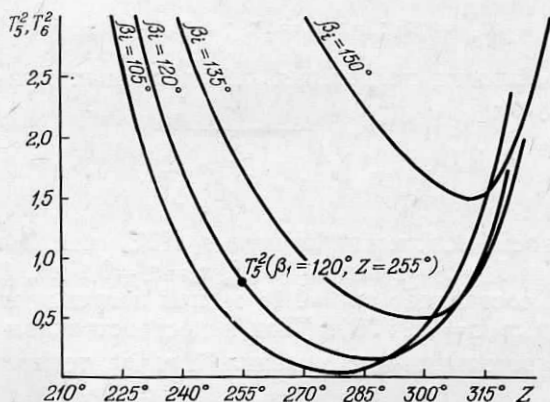


Рис. 3. График изменения величин T_5^2 и T_6^2 .

Погрешности определения остальных углов при исходных пунктах

$$\left. \begin{aligned} m_{\delta_2} &= m_{\delta_3} = \sqrt{2m_\beta^2 + m_{\delta_1}^2 + 2m_\beta m_{\delta_1} (r_1 + r_2)}; \\ m_{\delta_4} &= \sqrt{4m_\beta^2 + m_{\delta_1}^2 + 2m_\beta m_{\delta_1} (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где $r_1 = -0,125$; $r_2 = -0,10$; $r_3 = -0,10$; $r_4 = -0,06$ — коэффициенты корреляционной зависимости между измеряемыми величинами соответственно β_1 , β_2 , β_3 , β_4 и углом δ_1 , вычисленные методом математического моделирования на ЭВМ.

Расстояние a_2 находим с погрешностью

$$m_{a_2} = \sqrt{(f_1^2 + f_2^2) \frac{m_\beta^2}{\rho^2} + f_3^2 \left(\frac{m_s}{s} \right)^2 s_1^2 + f_4^2 \frac{m_{\delta_1}^2}{\rho^2} + 2f_4 (f_1 r_1 + f_2 r_2) \frac{m_\beta m_{\delta_1}}{\rho^2}}, \quad (31)$$

где f_i — частные производные функции (2), вычисляемые по формулам:

$$f_1 = s_1 \frac{\cos \beta_1}{\sin (\beta_1 + \beta_2)} - a_2 \operatorname{ctg} (\beta_1 + \beta_2); \quad f_3 = \frac{\sin \beta_1}{\sin (\beta_1 + \beta_2)};$$

$$f_2 = -a_2 \operatorname{ctg} (\beta_1 + \beta_2); \quad f_4 = -b_1 \frac{\cos \delta_1}{\sin (\beta_1 + \beta_2)}. \quad (32)$$

Аналогично можно вычислить погрешности определения расстояний a_1 и a_3 . В формуле (31) не учтены коэффициенты корреляционной зависимости между s_1 , s_2 и δ_1 , так как они пренебрежимо малы и составляют $r = -0,005$.

Учитывая, что погрешности m_{α_i} дирекционных углов α_i

$$m_{\alpha_1} = m_{\delta_1}; \quad m_{\alpha_2} = m_{\delta_2}; \quad m_{\alpha_3} = m_{\delta_1}, \quad (33)$$

найдем погрешности положения определяемых пунктов p_1 , p_2 и p_3 по формуле

$$m_{p_i} = \sqrt{m_{a_i}^2 + a_i^2 \frac{m_{\alpha_i}^2}{\rho^2}}. \quad (34)$$

Так, погрешность положения пункта p_2 ЛУЗ (рис. 1, а) с исходными данными $b_1 = b_2 = 2$ км, $\omega = 180^\circ$, $s_1 = s_2 = 0,2$ км, $\beta_1 = \beta_4 = 135^\circ$ и $\beta_2 = \beta_3 = 90^\circ$ составляет $m_{p_2} = 0,16$ м при погрешностях измерений $m_{\beta} = 5''$ и $m_s/s = 1/25\,000$. (При непосредственном измерении угла δ_2 и расстояния a_2 с указанной выше точностью $m'_{p_2} = 0,085$ м).

Для повышения точности ЛУЗ и контроля полевых измерений необходимо отнаблюдать дополнительные направления на исходные пункты. Уравнивание ЛУЗ целесообразно выполнять параметрическим методом, вычисляя при этом поправки в приближенные координаты определяемых пунктов. В этом случае точность определения положения пунктов p_1 , p_2 и p_3 можно найти, построив эллипсы погрешностей.

Остальные ЛУЗ, показанные на рис. 1, являются частными случаями рассмотренной задачи, что позволяет решать их на ЭВМ по общей программе. Особенности ввода исходной информации указаны на рис. 1 для каждой схемы ЛУЗ. Например, для определения положения двух пунктов p_1 и p_2 по трем исходным способом ЛУЗ (рис. 1, в) принимаем, что $s_2 = 0$ и $\beta_4 = 180^\circ$.

ЛУЗ можно применять для отыскания утраченных центров [1], для определения координат пунктов съемочного обоснования и плановых опознаков. Применение ЛУЗ для привязки строительных сеток и других специальных геодезических сетей к исходным пунктам значительно сокращает объем полевых и камеральных работ и дает возможность исключить влияние погрешностей исходных данных на точность взаимного положения пунктов привязываемой сети.

Применение ЛУЗ, как и обратных угловых засечек, имеет ряд достоинств [3]:

— использование хорошо видимых, но труднодоступных исходных пунктов;

— наблюдение минимального числа направлений на исходные пункты;

— возможность создания сетей из различных схем ЛУЗ;

— незначительный объем полевых и камеральных работ;

— вычисление координат пунктов на ЭВМ по общей программе.

В заключение можно отметить, что линейно-угловые засечки могут широко применяться при различных видах геодезических работ. Приведенные формулы позволяют в каждом конкретном случае произвести расчет точности проектируемой ЛУЗ и выбрать оптимальную точность измерений углов и длин линий. Контролировать положения пунктов p_1 , p_2 и p_3 можно, наблюдая дополнительные направления на исходные пункты, создавая сети из различных схем ЛУЗ и их комбинаций с обратными угловыми засечками и т. п.

Список литературы: 1. Высшая геодезия/Зданович В. Г. и др. М., Недра, 1970. 2. *Зубрицкий И. В.* Теоретические основы построения геодезических сетей из четырехугольников. — Тр./БСХА., 1952, т. 18. 3. *Павлов В. Ф.* О применении систем обратных засечек. — Геодезия и картография, 1972, № 2. 4. *Kleiner Th.* RÜchwärtsschnitt für drei Punkte. — Vermessungstechnik Rundschau, 1963, t. 25, № 2.

Работа поступила 21 декабря 1977 года.
Рекомендована кафедрой геодезии Коммунарского горно-металлургического института.