

М. И. РУСИН

СВЯЗЬ МЕЖДУ АЗИМУТАМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ И ЦЕНТРАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Целесообразность решения главной геодезической задачи на большие расстояния по центральному сечению * обоснована в [1, 3, 4]. В указанных работах, а также в [6] рассматриваются вопросы решения названной задачи. Однако в настоящее время в большинстве случаев практики главную геодезическую задачу решают по геодезической линии. Поэтому очевидна необходимость в установлении зависимости между элементами (длинами дуг и азимутами) геодезической линии и центрального сечения. Частично этот вопрос решен. Так, в [4] приводится формула определения разности длин центрального сечения s' и геодезической линии s , имеющая вид

$$\frac{s' - s}{a} = \frac{e^4}{16} \sin^2 m \cos^2 m \left\{ \sigma + \sin \sigma \cos (2\sigma_1 + \sigma) - \right. \\ \left. - \frac{\sigma^2}{\sin \sigma} [\cos \sigma + \cos (2\sigma_1 + \sigma)] \right\}. \quad (1)$$

В ней удержаны члены с e^4 , что в большинстве случаев является достаточным (обеспечивает точность примерно 0,1 м).

Такая же формула, полученная другим путем, приводится в [2].

Имеются и формулы определения разности азимутов геодезической линии и центрального сечения (геоцентрического его изображения) [4]. Однако в них удержаны только члены порядка e^2 , что отвечает лишь приближенным вычислениям.

Для вычислений азимутов с точностью 0",001 необходимо иметь формулы определения разностей с погрешностью не более e^6 . Ниже приводится вывод формул указанной точности.

Запишем разности азимутов в точках A и B эллипсоида, относящиеся к геодезической линии (рис. 1) и к геоцентрическому изображению центрального сечения (рис. 2) так:

$$\left. \begin{aligned} A_1 - A'_1 &= (A_m - A'_m) - (\Delta A - \Delta A') \\ A_2 - A'_2 &= (A_m - A'_m) + (\Delta A - \Delta A') \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$A_m = \frac{1}{2} (A_2 + A_1); \quad \Delta A = \frac{1}{2} (A_2 - A_1); \quad (3)$$

$$A'_m = \frac{1}{2} (A'_2 + A'_1); \quad \Delta A' = \frac{1}{2} (A'_2 - A'_1). \quad (4)$$

* В работах В. Н. Ганьшина принят термин «центральная кривая».

Выражения (3) и (4) получим из решения сферических треугольников $A_1B_1P_1$ (рис. 1) и $A'B'P'$ (рис. 2):

$$\operatorname{tg} A_m = \frac{\cos u_m}{\sin \Delta u} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}; \quad \operatorname{tg} \Delta A = \frac{\sin u_m}{\cos \Delta u} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}; \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} A'_m = \frac{\cos \Phi_m}{\sin \Delta \Phi} \operatorname{tg} \frac{l}{2}; \quad \operatorname{tg} \Delta A' = \frac{\sin \Phi_m}{\cos \Delta \Phi} \operatorname{tg} \frac{l}{2}, \quad (6)$$

причем $u_m = \frac{1}{2}(u_2 + u_1)$, $\Delta u = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)$, $\Phi_m = \frac{1}{2}(\Phi_2 + \Phi_1)$, $\Delta \Phi = \frac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_1)$.

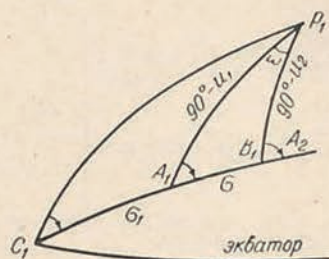


Рис. 1. Бесселево изображение треугольника ABP эллипсоида на сфере.

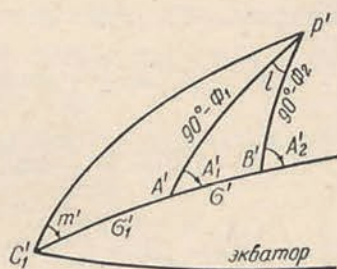


Рис. 2. Геоцентрическое изображение треугольника ABP эллипсоида на сфере.

Заменим в (6) Φ и l через u и ω . Для этого воспользуемся следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \sin \Phi_m &= \sin u_m \left[1 - 2na_u + \frac{e^4}{4}(b_u \operatorname{ctg} u_m - c_u) \right] \\ \cos \Phi_m &= \cos u_m \left[1 + 2nd_u - \frac{e^4}{4}(b_u \operatorname{tg} u_m + c_u) \right] \\ \sin \Delta \Phi &= \sin \Delta u \left[1 - 2nf_u + \frac{e^4}{4}(g_u \operatorname{ctg} \Delta u - h_u) \right] \\ \cos \Delta \Phi &= \cos \Delta u \left[1 + 2ni_u - \frac{e^4}{4}(g_u \operatorname{tg} \Delta u + h_u) \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \frac{l}{2} = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} [1 + e^2 \psi (1 + e^2 \varphi)], \quad (8)$$

в которых приняты обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a_u &= \cos^2 u_m \cos 2\Delta u; \quad b_u = \frac{1}{8} \sin 4u_m \cos 4\Delta u; \quad c_u = \frac{1}{8} \sin^2 2u_m \cos^2 2\Delta u; \\ d_u &= \sin^2 u_m \cos 2\Delta u; \quad f_u = \cos^2 \Delta u \cos 2u_m; \quad g_u = \frac{1}{8} \sin 4\Delta u \cos 4u_m; \\ h_u &= \frac{1}{8} \sin^2 2\Delta u \cos^2 2u_m; \quad i_u = \sin^2 \Delta u \cos 2u_m. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\varphi = \frac{\psi}{4} \left(\tau - \sigma \sin m \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \right), \quad (10)$$

$$\tau = 1 - \frac{1}{2} \cos^2 m \left[1 - \frac{\sin \sigma}{\sigma} \cos (2\sigma_1 + \sigma) \right], \quad (11)$$

$$\psi = -\frac{\sigma \sin m}{2 \sin \omega}, \quad (12)$$

$$\text{а } n = \frac{e^2}{4} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right).$$

Теперь формулам (6) придадим вид

$$\operatorname{tg} A_m' = \operatorname{tg} A_m (1 + e^2 B + e^4 C), \quad \operatorname{tg} \Delta A' = \operatorname{tg} \Delta A (1 + e^2 D + e^4 E),$$

откуда, с ошибкой порядка e^6 , получим

$$\left. \begin{aligned} A_m - A_m' &= -\frac{e^2}{2} \sin 2A_m [B + e^2 (C - B^2 \sin^2 A_m)] \\ \Delta A - \Delta A' &= -\frac{e^2}{2} \sin 2\Delta A [D + e^2 (E - D^2 \sin^2 \Delta A)] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{1}{2} (d_u + f_u) + \psi; \quad D = -\frac{1}{2} (a_u + i_u) + \psi. \\ C &= \frac{1}{4} [(1 + f_u + 2\psi)(d_u + f_u) - c_u + h_u - b_u \operatorname{tg} u_m - g_u \operatorname{ctg} \Delta u + 4\varphi]; \\ E &= -\frac{1}{4} [(1 - i_u + 2\psi)(a_u + i_u) + c_u - h_u - b_u \operatorname{ctg} u_m - g_u \operatorname{tg} \Delta u - 4\varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Подставив выражения (13) в тождества (2), окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} (A_1 - A_1')'' &= \frac{e^2}{2} (D \sin 2\Delta A - B \sin 2A_m) \rho'' + \\ &+ \frac{e^4}{2} [\sin 2\Delta A (E - D^2 \sin^2 \Delta A) - \sin 2A_m (C - B^2 \sin^2 A_m)] \rho''; \\ (A_2 - A_2')'' &= -\frac{e^2}{2} (D \sin 2\Delta A + B \sin 2A_m) \rho'' - \\ &- \frac{e^4}{2} [\sin 2A_m (C - B^2 \sin^2 A_m) + \sin 2\Delta A (E - D^2 \sin^2 \Delta A)] \rho''. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Первые члены формул (15) соответствуют формулам В. П. Морозова [4].

В таком виде формулы удобны для перехода от азимутов геодезической линии к азимутам изображения центрального сечения на «геоцентрической» сфере. Для перехода от A' к азимутам центрального сечения α имеем формулу [4]

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} A'} = \frac{\cos \Phi}{\cos B} W^2$$

или

$$(\alpha - A')'' = -\frac{\rho''}{4} \sin 2A_1 [e^4 \cos^2 \Phi - (e^4 - 2e^6) \cos^4 \Phi - 2e^6 \cos^6 \Phi],$$

приводимую в [6].

Для перехода от азимутов центрального сечения (геоцентрического его изображения) к азимутам геодезической линии целесообразно правые части равенств (15) выразить через элементы центрального сечения. Не приводя подробный вывод, так как он аналогичен предыдущему, дадим формулы в окончательном виде

$$\left. \begin{aligned} (A_1 - A'_1)'' &= \frac{e^2}{2} (D' \sin 2\Delta A' - B' \sin 2A'_m) \rho'' + \\ &+ \frac{e^4}{2} [\sin 2A'_m (C' - B'^2 \sin^2 A_m) - \sin 2\Delta A' (E' - D'^2 \sin^2 \Delta A')] \rho''; \\ (A_2 - A'_2)'' &= -\frac{e^2}{2} (D' \sin 2\Delta A' + B' \sin 2A'_m) \rho'' + \\ &+ \frac{e^4}{2} [\sin 2A'_m (C' - B'^2 \sin^2 A'_m) + \sin 2\Delta A' (E' - D'^2 \sin^2 \Delta A')] \rho''. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\left. \begin{aligned} -B' &= -\frac{1}{2} (d_\Phi + f_\Phi) + \psi'; \quad -D' = \frac{1}{2} (a_\Phi + i_\Phi) + \psi'; \\ C' &= -\frac{1}{4} [(1 - f_\Phi + 2\psi')(d_\Phi + f_\Phi) + c_\Phi - h_\Phi + b_\Phi \operatorname{tg} \Phi_m + g_\Phi \operatorname{ctg} \Delta \Phi - 4\varphi']; \\ E' &= \frac{1}{4} [(1 + i_\Phi + 2\psi')(a_\Phi + i_\Phi) - c_\Phi + h_\Phi + b_\Phi \operatorname{ctg} \Phi_m + g_\Phi \operatorname{tg} \Delta \Phi + 4\varphi']. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} a_\Phi &= \cos^2 \Phi_m \cos 2\Delta \Phi; \quad b_\Phi = \frac{1}{8} \sin 4\Phi_m \cos 4\Delta \Phi; \quad c_\Phi = \frac{1}{8} \sin^2 2\Phi_m \cos^2 2\Delta \Phi; \\ d_\Phi &= \sin^2 \Phi_m \cos 2\Delta \Phi; \quad f_\Phi = \cos^2 \Delta \Phi \cos 2\Phi_m; \quad g_\Phi = \frac{1}{8} \sin 4\Delta \Phi \cos 4\Phi_m; \\ h_\Phi &= \frac{1}{8} \sin^2 2\Delta \Phi \cos^2 2\Phi_m; \quad i_\Phi = \sin^2 \Delta \Phi \cos 2\Phi_m. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\psi' = \frac{\sigma' \sin m'}{2 \sin l} \quad (19) \quad \varphi' = \frac{\psi'}{4} (\tau' + 2\xi), \quad (20)$$

$$\tau' = 1 - \frac{\cos^2 m'}{2} \left[1 - \frac{\sin \sigma'}{\sigma'} \cos (2\sigma'_1 + \sigma') \right]. \quad (21)$$

$$\xi = \operatorname{ctg} A'_1 (D' \sin 2\Delta A' - B' \sin 2A'_m) - \sin^2 \Phi_1 + \frac{2k}{\sigma'} + \frac{\sigma' \sin m'}{2} \operatorname{tg} \frac{l}{2}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{\cos \Phi_1 \cos \Phi_2}{2 \sin \sigma'} \left[\sigma' \sin m' \sin l + \cos l (\sin^2 \Phi_1 + \sin^2 \Phi_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \Phi_2 \sin 2\Phi_1 + \operatorname{tg} \Phi_1 \sin 2\Phi_2) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Приведем также соотношения, которые использовались при выводе формул (16):

$$\left. \begin{aligned} \sin u_m &= \sin \Phi_m \left[1 + 2na_\Phi + \frac{e^4}{4} (b_\Phi \operatorname{ctg} \Phi_m - c_\Phi) \right]; \\ \cos u_m &= \cos \Phi_m \left[1 - 2nd_\Phi - \frac{e^4}{4} (b_\Phi \operatorname{tg} \Phi_m + c_\Phi) \right]; \\ \sin \Delta u &= \sin \Delta \Phi \left[1 + 2nf_\Phi + \frac{e^4}{4} (g_\Phi \operatorname{ctg} \Delta \Phi - h_\Phi) \right]; \\ \cos \Delta u &= \cos \Delta \Phi \left[1 - 2ni_\Phi - \frac{e^4}{4} (g_\Phi \operatorname{tg} \Delta \Phi + h_\Phi) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\sigma = \sigma' + e^2 k \quad (25) \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \operatorname{tg} \frac{l}{2} [1 + e^2 \psi' (1 + e^2 \varphi')]. \quad (26)$$

Формулы проверены на численном примере со следующими данными: $B_1 = +14^\circ 15' 25'', 318$; $B_2 = -9^\circ 54' 49'', 123$; $l = L_2 - L_1 = +30^\circ 34' 54'', 330$. По этим данным решены обратные геодезические задачи по геодезической линии [5] и по центральному сечению [6] и получены разности азимутов $A_1 - A'_1 = -40'', 167$; $A_2 - A'_2 = -11'', 093$. Те же разности, полученные по формулам (15), соответственно равны $-40'', 169$ и $-11'', 095$, по формулам (16) — $-40'', 167$ и $-11'', 095$.

Полученные формулы обеспечивают указанную выше точность во всех случаях практики за исключением особого случая — когда l и σ стремятся к 180° .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганьшин В. Н. Сравнение длин геодезической линии и нормального сечения. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1958, вып. 2.
2. Ганьшин В. Н. Исследование произвольного нормального сечения на эллипсоиде вращения. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1962, вып. 6.
3. Мигаль Н. К. Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. — «Науч. зап. Львов. политехн. ин-та», вып. 15. Геодезия, 1949, № 1.
4. Морозов В. П. Методы решения геодезических задач на поверхности земного эллипсоида. М., 1958.
5. Рабинович Б. Н. Практикум по высшей геодезии, изд. 2-е. М., Геодезиздат, 1961.
6. Русин М. И. Решение геодезических задач на большие расстояния по центральному сечению. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1969, вып. 9.

Работа поступила 22 декабря 1972 года.
Рекомендована кафедрой космической геодезии и астрономии Львовского ордена Ленина политехнического института.