УДК 528.14

В. А. СКРЫЛЬ

К ВОПРОСУ ОБ ОБОСНОВАНИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

В задаче уравновешивания результатов измерений необходимо по полученным измеренным значениям $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ найти оценки искомых величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, линейно связанных с измеряемыми величинами $y_1, y_2, \ldots, y_k$:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \underset{k>n}{i} = 1, 2, \ldots, k. \tag{1}$$

Пусть ошибки измерений величины y_i

$$\Delta_i = Y_i - y_i \tag{2}$$

распределены по прямоугольному (равномерному) закону с математическим ожиданием, равным нулю. Тогда плотность распределения ошибок измерений Δ_i

$$f(\Delta_i)=\frac{1}{2|\Delta|_{\max}},$$

а значит, результат каждого измерения имеет плотность распределения

$$f(Y_i-y_i)=\frac{1}{2|Y_i-y_i|_{\max}}=\frac{1}{2\left|Y_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|_{\max}}. \tag{3}$$

Для отыскания оценок x_j применим известный метод максимума правдоподобия Фишера [2]. Найдем многомерную плотность распределения выборки $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$:

$$L(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)=\prod_{i=1}^{k}f(Y_i-y_i)=\frac{1}{2^k\left|Y_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|_{\max}^{k}}. \tag{4}$$

Функция L, выражающая плотность совместного распределения результатов измерений, как известно, носит название функции правдоподобия.

Метод максимума правдоподобия заключается в том, что в качестве оценок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимают такие значения, при которых L достигает наибольшего возможного значения. Из выражения (4) видно, что максимальному значению функции L соответствует наименьшее значение знаменателя дроби, совместимое с данными выборки, что приводит к условию

$$\left|Y_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|_{\max}=\min \tag{5}$$

или на основании (1) и (2)

$$|\Delta|_{\max}=\min. \tag{6}$$

Каждое из условий (5) или (6) является математическим выражением метода чебышевского приближения.

Таким образом, решение системы линейных уравнений, возникающих при уравновешивании результатов измерений:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+l_i=v_i$$

(здесь $l_i=-y_i$, а $v_i=-\Delta_i$) при условии

$$|v|_{\max}=\left|\sum_{j=1} a_{ij}x_j+l_i\right|_{\max}=\min$$

приводит в случае прямоугольного закона распределения их ошибок к оценкам x_j, наилучшим образом согласующимся с результатами измерений. Согласно [2], оценки, полученные в соответствии с методом максимума правдоподобия, при некоторых общих условиях обладают важными достоинствами: несмещенностью, состоятельностью и эффективностью.

На основании всего сказанного делаем вывод о возможности применения в некоторых случаях при обработке результатов измерений принципа $|v|_{\max}=\min$. Известно, что прямоугольное распределение обладает отрицательным эксцессом $E=-1{,}2$. Поэтому, очевидно, нет смысла производить оценку результатов измерений методом чебышевского приближения в тех случаях, когда ошибкам измерений соответствуют островершинные распределения с положительным эксцессом. Однако по мере эволюции от нормальной кривой распределения ($E=0$) к более пологой решение (в соответствии с условием $|v|_{\max}=\min$) становится более эффективным, чем при использовании принципа наименьших квадратов.

Отрицательный эксцесс часто имеет место в композиции законов распределений, встречающихся в практике геодезических измерений. Например, на результаты измерений в большей или меньшей мере влияют ошибки округлений, имеющие прямоугольное распределение [1]. Сумма же двух ошибок, распределенных по нормальному и прямоугольному законам $\Delta=\Delta_1+\Delta_2$, обладает распределением с отрицательным эксцессом $-1{,}2<E<0$.

Кроме того, необходимость исключения из результатов измерений грубых ошибок, проявляющихся в соблюдении определенных допусков, приводит к усеченному нормальному или близким к нему распределениям ошибок с отрицательным эксцессом.

В литературе также указывается на встречающийся в практике геодезических измерений равномерный закон распределения ошибок. Так, анализ распределения невязок в триангуляционной сети из 89 треугольников показал, что они равномерно распределены [3].

Сказанное выше ни в коей мере не затрагивает ведущей роли способа наименьших квадратов. Однако при определенном значении отрицательного эксцесса закона распределения ошибок, применение метода чебышевского приближения для обработки результатов измерений становится обоснованным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Видуев Н. Г., Кондра Г. С. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений. М., «Недра», 1969, 320 с.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. М., ИЛ, 1948, 632 с.
3. Szacherska M. K. Analiza rozkładu Błędów zamknięć trojkątów w polskich sieciach triangulacyjnych w świetle hipoter o strukturze Błędów. «Geodezja i kartografia», 1971, 20, № 4, с. 283—289.

Работа поступила в редколлегию 13 января 1975 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.