РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1974 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 19

УДК 528.3

Н. А. КУЦЕРИБ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ЗЕМНОЙ ХОРДЫ, СОЕДИНЯЮЩЕЙ ДВА ПУНКТА КОСМИЧЕСКОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Определение направлений и длин хорд, соединяющих пункты космической триангуляции, является одной из основных задач космической геодезии. По определению направлений хорд, осуществляемому посредством синхронных плоскостей, к настоящему времени накоплен большой опыт и достигнута сравнительно высокая точность. Что же

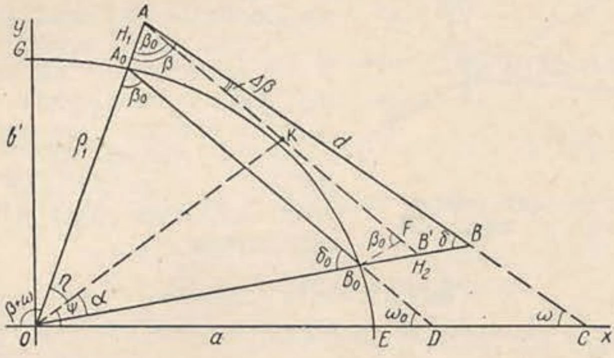

Рис. 1. Геоцентрическое сечение Земли плоскостью, проходящей через хорду AB.

касается определения длин хорд, то эта проблема пока находится в стадии разработки и экспериментов. В последнее время с целью определения длин хорд стали синхронно с фотографическими наблюдениями ИСЗ измерять расстояния до спутников с помощью лазерных установок [2]. Этот метод технически сложен и может быть применен только при наблюдении специальных геодезических спутников, снабженных уголковыми отражателями.

Мы предлагаем свой метод нахождения длины хорды. При этом считаем, что направление хорды уже определено с высокой точностью, и геоцентрические координаты одного из концов хорды, а также геодезические высоты обеих конечных точек ее известны. Заметим, что на целесообразность использования высот пунктов при определении длин хорд указывал Л. П. Пеллинен [3]. Подобная задача другим способом уже решена в геодезической системе координат В. Ф. Еремеевым и М. И. Юркиной [1]. В отличие от [1] мы в большинстве формул имеем дело с малыми числами и вместо вычисления ряда приближений задача окончательно решается с использованием дифференциальных поправок.

Пусть AB (рис. 1) — земная хорда, длину d которой необходимо определить. По синхронным наблюдениям ИСЗ с точек A и B вычислены в геоцентрической системе координаты Φ и Λ направления хорды AB, характеризующие соответственно наклон хорды к экватору и ориентировку относительно оси абсцисс ее проекции на экваториальную плоскость. Геоцентрические координаты Φ_1, L_1 точки A и геодезические высоты H_1 и H_2 точек A и B известны. Принятое на рис. 1 направление отсчета геодезических высот H (по радиусу-вектору эллипсоида) вполне допустимо, потому что возникающие при этом ошибки в высотах даже при $H=5000$ *м* не превышают 2 *см*.

Задача определения d сводится к нахождению значений углов β и $\alpha+\eta$ треугольника ABO (см. рис. 1).

Угол β определим из сферического треугольника PZM (рис. 2)

$$\cos\beta=-\sin\Phi\sin\Phi_1-\cos\Phi\cos\Phi_1\cos(\Lambda-L_1). \qquad (1)$$

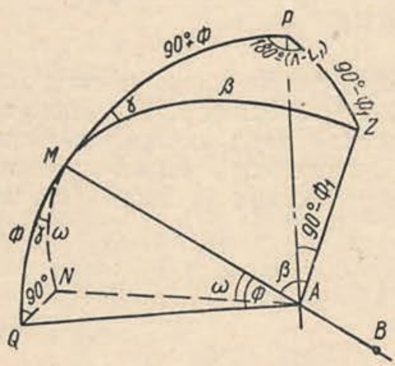

Рис. 2. Вспомогательная сфера с центром в точке A хорды AB.

Из этого же треугольника найдем угол γ

$$\sin\gamma=\sin(\Lambda-L_1)\cos\Phi_1\operatorname{cosec}\beta, \qquad (2)$$

посредством которого из прямоугольного сферического треугольника MNQ (рис. 2) определяется угол ω

$$\operatorname{ctg}\omega=\cos\gamma\operatorname{tg}(90^\circ+\Phi), \qquad (3)$$

необходимый для отыскания α и η.

Чтобы найти α и η, вместо углов β и ω используем углы β_0 и ω_0, характеризующие направление хорды A_0B_0 эллипса сечения. Для этого на рис. 1 проведем линию AB' при условии $AB'\|A_0B_0$ и линию B_0F так, чтобы угол B_0FA был равен β_0. По построению имеем

$$\beta_0=\beta-\Delta\beta,\quad \omega_0=\omega+\Delta\beta. \qquad (4)$$

Угол $\Delta\beta$ найдем из треугольника ABB':

$$\Delta\beta=\frac{BB'}{AB'}\rho''\sin\delta, \qquad (а)$$

где

$$BB'=H_2-B_0B'. \qquad (б)$$

Величину B_0B' определим из треугольника B_0FB'

$$B_0B'=H_1\frac{\sin\beta_0}{\sin\delta_0}. \qquad (в)$$

После подстановки (б) и (в) в (а), полагая $\sin\delta/\sin\delta_0=1$, получаем окончательную формулу для нахождения $\Delta\beta$

$$\Delta\beta=\frac{H_2\sin\delta_0-H_1\sin\beta_0}{AB'}\rho''. \qquad (5)$$

Величину $\Delta\beta$ нельзя сразу вычислить по формуле (5), потому что неизвестны δ_0, β_0 и AB'. Определение $\Delta\beta$ должно производиться в два этапа. Сначала следует найти приближенное значение $\Delta\beta_0$ по формуле

$$\Delta\beta_0=\frac{H_2-H_1}{AB'_{\text{прибл}}}\rho''\sin\beta, \qquad (6)$$

а затем после решения с $\Delta\beta_0$ задачи в первом приближении вычислить по формуле (5) точное значение $\Delta\beta$, определить неучтенную на первом этапе разность

$$\Delta=\Delta\beta-\Delta\beta_0 \tag{7}$$

и ввести поправки в соответствующие углы за неучет разности Δ.

Для решения задачи в первом приближении необходимо найти угол ψ между большой полуосью OE эллипса сечения (см. рис. 1) и линией OK, делящей хорду AB_0 эллипса и линию AB' пополам. Согласно теореме Аполлония,

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{b'^2}{a^2\operatorname{tg}\omega_0}, \tag{8}$$

где a — большая полуось принятого референц-эллипсоида (большая полуось эллипса); b' — малая полуось эллипса. Величина b' может быть найдена подстановкой плоских координат x_1 и y_1 точки A_0 (рис. 1), определяемых по формулам

$$x_1=-\rho_1\cos(\beta+\omega),\ y_1=\rho_1\sin(\beta+\omega),$$

в уравнение эллипса, откуда

$$b'=\frac{a\rho_1\sin(\beta+\omega)}{\sqrt{a^2+\rho_1^2\cos^2(\beta+\omega)}}. \tag{9}$$

Для угла η, по значению очень близкого к углу α, напишем

$$\eta=180^\circ-(\beta+\omega+\psi). \tag{10}$$

Теперь имеются все данные для определения в первом приближении длины отрезка AB' и углов α и δ_0.

Величину AB' найдем из треугольника AOK

$$AB'=2AK=\frac{2(\rho_1+H_1)\operatorname{tg}\eta}{\sin\beta_0+\cos\beta_0\operatorname{tg}\eta}. \tag{11}$$

Углы α и δ_0 получим из следующих соотношений в треугольниках OAK и OKB':

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_0-\eta}{2}=\frac{OK-AK}{OK+AK}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ-(\beta_0+\eta)}{2}, \tag{г}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_0-\alpha}{2}=\frac{OK-KB'}{OK+KB'}\operatorname{ctg}\frac{\beta_0+\eta}{2}, \tag{д}$$

$$\frac{\delta_0+\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\delta_0+\eta}{2}. \tag{12}$$

Определив из (г) и (д) коэффициенты при котангенсах и приравняв их, найдем выражение для $\delta_0-\alpha$

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_0-\alpha}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta_0-\eta)}{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}(\beta_0+\eta)}. \tag{13}$$

Вычислив по формулам (12) и (13) $\delta_0-\alpha$ и $\delta_0+\alpha$, найдем δ_0 и α.

Теперь решение задачи в первом приближении можно завершить. Для этого, как указывалось ранее, следует вычислить по формулам (5) и (7) окончательное значение $\Delta\beta$ и неучтенную разность Δ. Чтобы не повторять все вычисления с окончательным значением $\Delta\beta$, найдем формулы для вычисления поправок в углы η и α за неучет Δ. Для определения поправки в угол η продифференцируем выражения (8) и (10) по переменным ψ, ω_0 и η

$$d\psi = -\frac{a^2 \sin^2 \psi}{b'^2 \cos^2 \omega_0} d\omega_0, \tag{е}$$

$$d\eta = -d\psi. \tag{ж}$$

Исходя из того, что $a \approx b^1$ и $\psi \approx 90° - \omega_0$, из (г) и (д) с учетом (4) после перехода от дифференциалов к соответствующим поправкам получаем

$$\Delta\eta = \Delta\omega_0 = \Delta. \tag{з}$$

Поправки в углы α и δ_0 найдем, продифференцировав уравнения (12) и (13) по переменным β_0, η, α и δ_0,

$$d\delta_0 + d\alpha = -(d\beta_0 + d\eta), \tag{и}$$

$$d\delta_0 - d\alpha = -\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta_0 - \eta}{2} \cos^2 \frac{\delta_0 - \alpha}{2}}{tg\,\frac{\beta_0 + \eta_0}{2} \sin^2 \frac{\beta_0 + \eta}{2}} (d\beta_0 + d\eta) +$$

$$+ \frac{\cos^2 \frac{\beta_0 + \eta}{2} \cos^2 \frac{\delta_0 - a}{2}}{\sin^2 \frac{\beta_0 + \eta}{2} \cos^2 \frac{\beta_0 - \eta}{2}} (d\beta_0 - d\eta). \tag{к}$$

Учитывая, что поправка в угол β_0 согласно (4) равна $-\Delta$, $\frac{1}{2}(\beta_0 + \eta) \approx$ $\approx 45°$ и $\delta_0 - \alpha \approx \beta_0 - \eta$, из (и) и (к) с учетом (з) после перехода от дифференциалов к поправкам получаем

$$\Delta\delta_0 + \Delta\alpha = 0, \ \Delta\delta_0 - \Delta\alpha = -2\,\Delta, \tag{л}$$

откуда $\Delta\alpha = \Delta$.

Окончательное значение d определим из треугольника ABO (см. рис. 1) по заданному радиусу-вектору $\rho_1 + H_1$, углу β и вычисленному в первом приближении углу $\alpha + \eta$, исправленному дифференциальной поправкой $2\,\Delta$.

$$d = \frac{(\rho_1 + H_1) \sin(\alpha + \eta + 2\,\Delta)}{\sin(\beta + \eta + \alpha + 2\,\Delta)}. \tag{14}$$

Формулы (1)—(14) точно решают поставленную задачу.

В заключение проанализируем влияние ошибок исходных данных ρ_1, H_1 и H_2 на точность определения длины хорды.

Из формулы (14) следует, что ошибка в d, вызванная погрешностью в $\rho_1 + H_1$, прямо пропорциональна отношению d к $\rho_1 + H_1$. Существенное влияние на точность определения d оказывает ошибка ΔH в разности высот $H_2 - H_1$. Согласно формулам (6), (7), (з) и (л) влияние ошибки ΔH на величину угла $\alpha + \eta$ равно

$$m = \frac{2\,\Delta H}{d} \rho'' \sin \beta,$$

что в длине хорды приводит к погрешности, определяемой приближенно так:

$$m \cdot l, \tag{м}$$

где l — длина дуги меридиана, равная 1″.

По формуле (м) для разных значений d получено такое соотношение ошибок в длине хорды и разности высот: при значениях длин хорд в 2000, 4000, 6000 и 8000 *км* ошибки в длинах хорд равны соответственно 6,2 ΔH, 3,0 ΔH, 1,9 ΔH и 1,3 ΔH.

Из изложенного следует, что применение предлагаемого способа предпочтительнее при длинных хордах, чем при коротких.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Некоторые вопросы обработки пространственных сетей. — Тр. ЦНИИГАиК, вып. 171, М., 1966.
2. Жонголович И. Д. Проект геодезического векторного хода Арктика—Антарктика. М., Изд-во Астросовета АН СССР, 1969.
3. Пеллинен Л. П. О целесообразных путях совместной обработки наземной и космической триангуляции. — Бюлл. ст. оптич. наблюд. ИСЗ, 1969, № 55.

Работа поступила в редколлегию 28 января 1971 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Украинского института инженеров водного хозяйства.