УДК 528.21:531.25

А. Е. ФИЛИППОВ

ОБ УРАВНИВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ БЕЗ РЕДУЦИРОВАНИЯ НА РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИД

При определении плановых координат пунктов линейные геодезические сети уравнивают обычно на поверхности референц-эллипсоида или на плоскости в проекции Гаусса—Крюгера. Производя редуцирование измеренных наклонных дальностей на соответствующую поверхность, переходят, по существу, к уравниванию функций результатов измерений, однако корреляционную матрицу ошибок измерений оставляют неизменной. Этот момент практически не нарушает строгости уравнивания, так как различия между непосредственно измеренными геометрическими элементами сети и соответствующими элементами на эллипсоиде или на плоскости невелики.

В геодезических координатах уравнивают обширные радиогеодезические сети. Обработку их по методу необходимых неизветных без существенных усложнений можно произвести и не прибегая к предварительному редуцированию наклонных дальностей на поверхность референц-эллипсоида. Для этого следует воспользоваться (с некоторыми изменениями) известными уравнениями, вытекающими из геометрических связей в линейных сетях, рассматриваемых как пространственные построения. Вопрос о соответствующем изменении корреляционной матрицы в этом случае вообще не возникает.

Пусть мы имеем систему приближенных значений геодезических координат B_k°, L_k°, H_k° пунктов линейной сети, причем геодезические высоты H_k° известны с точностью, достаточной для правильного редуцирования наклонных дальностей на поверхность референц-эллипсоида. Из уравнивания необходимо найти поправки ΔB_k, ΔL_k к значениям B_k°, L_k°.

Уравнения поправок для измеренных наклонных дальностей получают на основе известной дифференциальной формулы, определяющей изменение длины D_{ij} прямой P_iP_j в зависимости от изменения геодезических координат ее конечных точек [1, 5]:

$$\begin{gathered}dD_{ij}=-(M_i+H_i)\cos A_{ij}\sin Z_{ij}dB_i-\\-(N_i+H_i)\cos B_i\sin A_{ij}\sin Z_{ij}dL_i-\\-(M_j+H_j)\cos A_{ji}\sin Z_{ji}dB_j-\\-(N_j+H_j)\cos B_j\sin A_{ji}\sin Z_{ji}dL_j-\\-\cos Z_{ij}dH_i-\cos Z_{ji}dH_j.\end{gathered}\tag{1}$$

Величины A_{ij}, A_{ji}, Z_{ij}, Z_{ji} представляют собой прямые и обратные геодезические азимуты и геодезические зенитные расстояния прямой. В рассматриваемом случае следует принять $dH_i=$ $=dH_j=0$.

Как и при уравнивании на референц-эллипсоиде, удобно ввести новые неизвестные [6]:

$$u_k=\frac{M_k+H_k}{\rho''}\Delta B_k'', \quad v_k=\frac{(N_k+H_k)\cos B_k}{\rho''}\Delta L_k''. \tag{2}$$

Перейдя в уравнении (1) к конечным приращениям, получим, принимая во внимание (2),

$$\begin{gathered}v_{D_{ij}}=-\cos A_{ij}\sin Z_{ij}u_i-\sin A_{ij}\sin Z_{ij}v_i-\cos A_{ji}\sin Z_{ji}u_j-\\-\sin A_{ji}\sin Z_{ji}v_j+(\overset{\circ}{D}_{ij}-D_{ij}),\end{gathered}\tag{3}$$

где D_{ij} — измеренное значение наклонной дальности, а $\overset{\circ}{D}_{ij}$ — вычисленное по координатам $\overset{\circ}{B}_i$, $\overset{\circ}{L}_i$, $\overset{\circ}{H}_i$, $\overset{\circ}{B}_j$, $\overset{\circ}{L}_j$, $\overset{\circ}{H}_j$.

Уравнение (3), при условии $\Delta H_i=\Delta H_j=0$, является общим уравнением поправок, соответствующим любой из прямых, соединяющих смежные пункты линейной сети.

На некоторых пунктах могут быть известны значения астрономических α_{ij} или геодезических A_{ij} азимутов наклонных дальностей. Если эти величины рассматривать как жесткие, то к системе уравнений (3) следует добавить соответствующие условные уравнения. Последние вытекают из известных дифференциальных формул астрономических и геодезических азимутов [1, 5]:

$$\begin{gathered}D_{ij}\sin Z_{ij}d\alpha_{ij}=-\bar{n}_1dL_j-\bar{n}_2dB_j-\bar{n}_3dH_j+\\+n_1dL_i+n_2dB_i+n_3dH_i+D_{ij}\sin A_{ij}\cos Z_{ij}d\varphi_i+\\+D_{ij}(\sin B_i\sin Z_{ij}-\cos B_i\cos A_{ij}\cos Z_{ij})\,d\lambda_i;\end{gathered}\tag{4}$$

$$D_{ij}\sin Z_{ij}dA_{ij}=-\bar{n}_1 dL_j-\bar{n}_2 dB_j-\bar{n}_3 dH_j+n_1 dL_i+n_2 dB_i+$$
$$+n_3 dH_i+D_{ij}(\sin B_i\sin Z_{ij}-\cos B_i\cos A_{ij}\cos Z_{ij})\,dL_i+$$
$$+D_{ij}\sin A_{ij}\cos Z_{ij}dB_i, \tag{5}$$

где $n_1=-(N_i+H_i)\cos B_i\cos A_{ij}$; $n_2=(M_i+H_i)\sin A_{ij}$; $n_3=0$.

Точные выражения для величин $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$, $\bar{n}_3$ весьма громоздки, однако с несущественной в большинстве случаев ошибкой можно принять [3, 4]:

$$\bar{n}_1=(N_j+H_j)\cos B_j\cos A_{ji};\ \bar{n}_2=-(M_j+H_j)\sin A_{ji};\ \bar{n}_3=0. \tag{6}$$

Если на пункте известны жесткие значения астрономических координат φ_i, λ_i и астрономического азимута наклонной дальности α_{ij}, то в соответствии с формулами (4) и (2) возникает условное уравнение

$$\sin A_{ij}u_i-\cos A_{ij}v_i+\sin A_{ji}u_j-\cos A_{ji}v_j+$$
$$+\frac{D_{ij}\sin Z_{ij}}{\rho''}(\overset{\circ}{\alpha}_{ij}-\alpha_{ij})=0, \tag{7}$$

где

$$\overset{\circ}{\alpha}_{ij}=\overset{\circ}{A}_{ij}+(\lambda_i-\overset{\circ}{L}_i)\sin B_i+[(\varphi_i-\overset{\circ}{B}_i)\sin A_{ij}-$$
$$-(\lambda_i-\overset{\circ}{L}_i)\cos B_i\cos A_{ij}]\operatorname{ctg} Z_{ij}.$$

Если же известен и считается жестким геодезический азимут A_{ij}, то в соответствии с выражениями (5) и (2) следует составить уравнение

$$\sin A_{ij}\left(1+\frac{D_{ij}}{M_i+H_i}\cos Z_{ij}\right)u_i-\left[\cos A_{ij}-\frac{D_{ij}}{N_i+H_i}\times\right.$$
$$\left.\times(\operatorname{tg} B_i\sin Z_{ij}-\cos A_{ij}\cos Z_{ij})\right]v_i+\sin A_{ji}u_j-\cos A_{ji}v_j+$$
$$+\frac{D_{ij}\sin Z_{ij}}{\rho''}(\overset{\circ}{A}_{ij}-A_{ij})=0. \tag{8}$$

В уравнениях (7) и (8) величина A_{ij} представляет собой значение геодезического азимута, вычисленное по координатам B_i, $\overset{\circ}{L}_i$, $\overset{\circ}{H}_i$, $\overset{\circ}{B}_j$, $\overset{\circ}{L}_j$, $\overset{\circ}{H}_j$ конечных точек линии.

При обычных в наземных сетях наклонах линий к горизонту погрешности коэффициентов при поправках u_j, v_j в уравнениях (7) и (8), обусловленные неточностью формул (6), не превысят 10^{-4} при $D_{ij}<30$ км и 10^{-3} при $D_{ij}<1000$ км.

Значения наклонных дальностей, геодезических азимутов и геодезических зенитных расстояний, соответствующие системе приближенных значений B_k°, L_k°, H_k° координат пунктов и необходимые для вычисления коэффициентов и свободных членов уравнений (3), (7), (8), нетрудно получить из решения обратных пространственных геодезических задач, используя известные формулы [2, 5]:

$$\bar{D}_{12} \sin A_{12} \sin Z_{12} = (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin (L_2 - L_1),$$

$$D_{12} \cos A_{12} \sin Z_{12} = (N_2 + H_2) [\sin B_2 \cos B_1 - \cos B_2 \sin B_1 \cos \times \\ \times (L_2 - L_1)] - e^2 \cos B_1 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1),$$

$$D_{12} \cos Z_{12} = (N_2 + H_2) [\sin B_2 \sin B_1 + \cos B_2 \cos B_1 \cos (L_2 - L_1)] - \\ - (N_1 + H_1) - e^2 \sin B_1 (N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1). \tag{9}$$

Формулы (9) применимы при любых расстояниях и удобны для вычислений на ЭВМ.

Результаты решения системы уравнений (3) с учетом, когда необходимо, уравнений (7) или (8) практически будут соответствовать обработке линейной сети методом проектирования, если система высот H_k° задана относительно референц-эллипсоида, и обработке методом развертывания, если высоты известны относительно геоида или квазигеоида.

Точность, с которой должны быть известны высоты H_k°, определяется обычным требованием: ошибки редукций (в случае вычисления последних) должны быть в 5—10 раз меньше ошибок непосредственных измерений.

Искомые поправки в геодезические координаты будут найдены по формулам

$$\Delta B_k'' = \frac{\rho''}{M_k + H_k} u_k, \quad \Delta L_k'' = \frac{\rho''}{(N_k + H_k) \cos B_k} v_k.$$

Если предварительные координаты B_k°, L_k° определяемых пунктов, снятые с карты или полученные по линиям положения, неточны, то уточнить их значения можно путем последовательного решения пространственных линейных засечек. Пусть $P_1(B_1, L_1, H_1)$ и $P_2(B_2, L_2, H_2)$ — исходные пункты, с которых измерены наклонные дальности D_{31}, D_{32} до определяемого пункта $P_3(B_3^\circ, L_3^\circ, H_3)$. Поправки ΔB_3, ΔL_3 предварительных координат B_3, L_3° пункта P_3 вычислим по формулам

$$l_{31}=D_{31}-D_{31}^{\circ}, \quad l_{32}=D_{32}-D_{32}^{\circ},$$

$$u_3=\frac{l_{31}\sin A_{32}\sin Z_{32}-l_{32}\sin A_{31}\sin Z_{31}}{\sin(A_{31}-A_{32})\sin Z_{31}\sin Z_{32}},$$

$$v_3=\frac{l_{32}\cos A_{31}\sin Z_{31}-l_{31}\cos A_{32}\sin Z_{32}}{\sin(A_{31}-A_{32})\sin Z_{31}\sin Z_{32}},$$

$$\Delta B_3''=\frac{\rho''}{M_3+H_3}u_3, \quad \Delta L_3''=\frac{\rho''}{(N_3+H_3)\cos B_3}v_3.$$

Наклонные дальности D_{31}°, D_{32}°, геодезические зенитные расстояния и азимуты Z_{31}, Z_{32}, A_{31}, A_{32} получаем из решения обратных пространственных геодезических задач с использованием координат B_1, L_1, H_1, B_2, L_2, H_2, и B_3°, L_3°, H_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Некоторые вопросы обработки пространственных сетей. — «Тр. ЦНИИГАиК», 1966, вып. 171, с. 3—35.
2. Молоденский М. С. Новый метод решения геодезических задач. — «Тр. ЦНИИГАиК», 1954, вып. 103, с. 3—21.
3. Филиппов А. Е. О дифференциальных формулах пространственной обратной геодезической задачи. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1970, вып. 12, с. 84—87.
4. Dufour H. Étude de la compensation du réseau européen dans l'optique de la géodésie tridimensionelle. — «Bulletin géodésique», 1963, № 68.
5. Hotine M. A primer of non-classical geodesy. — A.I.G., Venice, 1959.
6. Wolf H. Die Grundgleichungen der dreidimensionalen Geodäsie in elementarer Darstellung. — «Zeitschrift für Vermessungswesen», 1963, № 6, с. 225—233.

Работа поступила в редколлегию 3 апреля 1975 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и астрономии Львовского политехнического института.