УДК 528

М. Брынь, П. Веселкин, М. Каралис, А. Астапович*
Петербургский государственный университет путей сообщения, г. Санкт-Петербург,
*Военный топографический институт, г. Санкт-Петербург)

ОБ УРАВНИВАНИИ ЛОКАЛЬНЫХ НАЗЕМНО-СПУТНИКОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ В ПЛОСКИХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрен алгоритм совместного уравнивания спутниковых и наземных измерений коррелатным и параметрическим способами, а также способом условий с дополнительными неизвестными в плоской прямоугольной системе координат. Приводятся соответствующие поправки уравнивания. Поданы формулы для расчета обратных весовых матриц уравненных значений измеренных величин, дополнительных параметров и их функций в рамках теории способа условий с дополнительными неизвестными.

Algorithms are considered for collateral equalizing of satellite and ground-level measurements by means of correlated and parametrical methods as well as by the method of conditions with complimentary unknowns in a plane rectangular coordinate system. Corresponding correction equations are given. Formulas are given for computing inverse weight matrices for equalized values of measured quantities, additional parameters and their functions within the framework of the theory of method of conditions with complimentary unknowns.

Построение локальных геодезических сетей для решения задач кадастра, инженерной геодезии и других основывается как на наземных (азимутальных, угловых, линейных), так в последнее время и спутниковых измерениях, представляемых, как правило, в виде пространственных приращений координат ΔX, ΔY, ΔZ в геоцентрической системе координат. Уравнивание наземных измерений в большинстве случаев практики в Российской Федерации выполняется с плоскими прямоугольными координатами Гаусса. Поэтому для решения задачи совместного уравнивания в плоских координатах необходимо спутниковые измерения и их ковариационные матрицы редуцировать на плоскость, составить уравнения поправок и решить их по методу наименьших квадратов.

Уравнивание параметрическим способом. Уравнительные вычисления в последние годы выполняются преимущественно параметрическим способом, который позволяет довольно легко автоматизировать процедуру составления уравнений поправок.

Составляется при этом, как правило, три вида уравнений поправок – углов (направлений), дирекционных углов и расстояний.

Для составления уравнений поправок спутниковых измерений плоские приращения координат Δx, Δy выражаются функциями координат x, y:

$$\Delta x_{12} = x_2 - x_1;\ \ \Delta y_{12} = y_2 - y_1.$$

Этим связям соответствуют уравнения поправок

$$\upsilon_{\Delta x} = \delta_{x_2} - \delta_{x_1} + \ell_{\Delta x};\ \ \upsilon_{\Delta y} = \delta_{y_2} - \delta_{y_1} + \ell_{\Delta y},$$

где $\upsilon_{\Delta x}$, $\upsilon_{\Delta y}$ – поправки к измеренным приращениям координат; $\ell_{\Delta x} = x_2^0 - x_1^0 - \Delta x_{12}$; $\ell_{\Delta y} = y_2^0 - y_1^0 - \Delta y_{12}$ – свободные члены; x^0, y^0, δx, δy – соответственно приближенные значения координат и поправки к ним.

Уравнения поправок удобно представить в матричном виде:

$$B\delta x + L = V, \tag{1}$$

где B – матрица коэффициентов уравнений поправок; δx – вектор неизвестных, т. е. поправок к приближенным значениям параметров; L – вектор свободных членов; V – вектор поправок к результатам измерений.

Совместное решение системы уравнений (1) выполняется под условием:

$$V^T PV = \min,$$

где P – весовая матрица, в общем случае устанавливаемая по формуле $P = \mu^2 K^{-1}$, где K – ковариационная матрица.

Формулы метода наименьших квадратов для решения уравнений (1) имеют вид: $N = B^T PB$; $\delta x = -N^{-1} B^T PL$. Матрица N^{-1} является обратной весовой матрицей Q_t уравненных параметров. Вычислив среднюю квадратическую ошибку единицы веса по формуле

$$\mu = \sqrt{V^T PV/(n-k)},$$

где n – общее число измерений; k – число необходимых измерений можно найти средние квадратические ошибки уравненных параметров $m_i = \mu\sqrt{Q_{t_{ii}}} = \mu\sqrt{N_{ii}^{-1}}$ $(i = 1 \ldots k)$.

Заметим, что при уравнивании только спутниковых определений измеренные величины связаны с необходимыми параметрами линейными функциями простейшего вида и коэффициенты уравнений поправок являются константами (единицами или нулями). Поэтому задача отыскания поправок к приближенным значениям параметров может быть решена при произвольных приближенных значениях неизвестных.

Уравнивание коррелатным способом. Коррелатный способ эффективен при уравнивании сетей с малым числом избыточных измерений. Кроме этого, коррелатный способ чаще всего используется на практике для строгой предварительной оценки проектов геодезических сетей. По невязкам условных уравнений судят о качестве полевых измерений и во многих случаях устанавливают веса результатов измерений.

Определение числа и вида условных уравнений в геодезических сетях с наземным составом измерений изучено и представлено в геодезической литературе. При использовании же спутниковых измерений возникают новые виды уравнений. Рассмотрим их.

Если в геодезической сети выполнены измерения только плоских приращений координат, то для приращений Δx в общем виде полигонные условия будут иметь вид: $\sum\limits_{i\in j} \pm \Delta x_i = 0$ – для замкнутых полигонов; $\sum\limits_{i\in j} \pm \Delta x_i + x_{\text{нач}} - x_{\text{кон}} = 0$ – для разомкнутых полигонов. Их линеаризация приводит к условным уравнениям поправок вида $\sum\limits_{i\in j} \pm \upsilon_{\Delta x_i} + \omega_j = 0$. Здесь $\sum\limits_{i\in j} \pm \upsilon_{\Delta x_i}$ – сумма поправок приращений, которые входят в данный полигон. Известно, что невязки ω_j вычисляются путем подстановки результатов измерений в условные уравнения. В нашем случае, полагая, что $\Delta x_i'$ – результаты измерений, невязки будут иметь вид: $\omega_j = \sum\limits_{i\in j} \pm \Delta x_i'$ – для замкнутых полигонов, $\omega_j = \sum\limits_{i\in j} \pm \Delta x_i' + x_{\text{нач}} - x_{\text{кон}}$ – для разомкнутых полигонов. Знак "+" будет в случае совпадения направления хода и полигона, в противном случае будет знак "-".

Аналогичные условные уравнения можно составить для приращений Δy.

Таким образом, число полигонных условных уравнений поправок будет равно удвоенному числу избыточно измеренных базисных линий в сети.

Если по стороне спутникового построения измерено и приведено на плоскость расстояние d, то условие будет иметь вид $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} - d = 0$. Исходя из общих правил составления условных уравнений поправок будем иметь соответствующее условное уравнение:

$$a\upsilon_{\Delta x} + b\upsilon_{\Delta y} - \upsilon_d + \omega = 0,$$

где $a = \dfrac{\Delta x}{d} = \cos\alpha$; $b = \dfrac{\Delta y}{d} = \sin\alpha$; α – дирекционный угол.

Если по стороне спутникового построения измерен дирекционный угол, то исходя из требования $\operatorname{arctg}\dfrac{\Delta x}{\Delta y} - \alpha = 0$ будем иметь следующее условное уравнение поправок:

$$a\upsilon_{\Delta x} + b\upsilon_{\Delta y} - \upsilon_\alpha + \omega = 0, \tag{2}$$

где

$$a = -\rho''\frac{\Delta y}{d^2} = -\rho''\frac{\sin\alpha}{d} = -\rho''\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\Delta x};\; b = \rho''\frac{\Delta x}{d^2} = \rho''\frac{\cos\alpha}{d} = \rho''\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\Delta y};\; \rho'' = 206265.$$

Представляя измеренный горизонтальный угол как разность дирекционных углов $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$ и, пользуясь формулой (2), получим следующее уравнение поправок:

$$a_2\upsilon_{\Delta x_2} + b_2\upsilon_{\Delta y_2} - a_1\upsilon_{\Delta x_1} - b_1\upsilon_{\Delta y_1} - \upsilon_\beta + \omega = 0.$$

Более сложный вид имеют условные уравнения в случае, если традиционные геодезические измерения выполнены не по базисным линиям спутниковой сети.

Систему условных уравнений поправок в матричной записи можно записать:

$$AV + W = 0, \tag{3}$$

где A – матрица коэффициентов условных уравнений; V – вектор поправок; W – вектор невязок.

Приведем формулы метода наименьших квадратов для решения системы (3):

$$N = AQA^T;\ k = -N^{-1}W;\ V = QA^Tk,$$

где N – матрица коэффициентов нормальных уравнений; Q – обратная весовая матрица измеренного вектора, $Q = P^{-1}$; k – вектор коррелат.

Оценка точности по результатам уравнивания выполняется по ранее приведенным формулам, при этом обратные веса уравненных значений измеренных величин являются диагональными элементами соответствующей обратной весовой матрицы $Q_X = Q_A Q$, где $Q_A = E - QA^T N^{-1} A$, E – единичная матрица.

Уравнивание способом условий с дополнительными неизвестными. При использовании коррелатного способа можно назначать дополнительные неизвестные. Такой способ получил название способа условий с дополнительными неизвестными. Он позволяет упростить составление условных уравнений, часто используется для уравнивания с оцениванием систематических ошибок.

Известно, что уравненные значения измеренных величин x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) как элементы вектора X и дополнительные неизвестные t_j ($j = 1, 2, \ldots, k_0$) как элементы вектора t образуют систему уравнений связи $\varphi(X, t) = 0$. Линеаризация данных уравнений приводит к системе уравнений поправок вида

$$AV + B\delta x + L = 0, \tag{4}$$

где $A = \dfrac{\partial\varphi}{\partial X}$, $B = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$, $L = \varphi(X', t_0)$ вычислены по известным результатам измерений X' и приближенным параметрам t_0; V, δx – поправки соответственно к X' и t_0.

Решение уравнений (4) по методу наименьших квадратов осуществляется по формулам:

$$\delta x = -(B^T P_L B)^{-1} B^T P_L L;\ k = -P_L(B\delta x + L);\ V = QA^T k,$$

где $P_L = (AQA^T)^{-1}$; k – вектор коррелат.

Вопросы оценки точности в рассматриваемом способе уравнивания разработаны применительно к решению нормальных уравнений по алгоритму Гаусса, хотя современная теория оценки точности базируется на алгебре матриц.

В рамках теории данного способа получены формулы вычисления обратных весовых матриц уравненных значений измеренных величин Q_X, дополнительных параметров Q_t и их функций Q_ϕ. Формулы имеют следующий вид:

$$Q_X = (E - QA^T P_L P_B A)Q;\ Q_t = (B^T P_L B)^{-1};$$

$$Q_{(X,t)} = \begin{bmatrix} Q_X & -QA^T P_L B Q_t \\ -Q_t B^T P_L A Q & Q_t \end{bmatrix};\quad Q_\phi = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial X}\right) & \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right) \end{bmatrix} Q_{(X,t)} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial X'}\right)^T \\ \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right)^T \end{bmatrix}. \tag{5}$$

В формулах (5) $P_B = E - B(B^T P_L B)^{-1} B^T P_L$.

В заключение заметим, что приведенные в работе уравнения и предложенные формулы оценки точности подтверждены результатами уравнивания на реальных объектах.