

А. А. КОЛОСОВ

Кузбасский политехнический институт

ВИДОИЗМЕНЕНИЕ СПОСОБА ДЕЛАМБРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ХОРДОВЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ НА СФЕРОИДЕ

Ж. Деламбр [7] в работе «Аналитические методы определения дуги меридиана» (1799) предложил способ решения хордовых треугольников, основанный на том, что в сферическом треугольнике ABC (рисунок) со сферическими углами A , B и C и хордами сторон K_a , K_b и K_c соблюдаются соотношения *

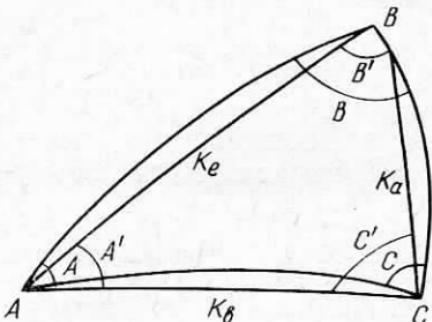
* В работе Ф. Гельмерта [2] эти соотношения неточно названы «теоремой Грюнерта».

$$\frac{K_a}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{4} \right)} = \frac{K_b}{\sin \left(B - \frac{\varepsilon}{4} \right)} = \frac{K_i}{\sin \left(C - \frac{\varepsilon}{4} \right)}, \quad (1)$$

где ε — сферический избыток треугольника ABC .

Аналогично решению малых сферических треугольников по упрощенным формулам Лежандра, по формулам (1) можно решать треугольники с длинами хорд до 150—200 км.

При очевидной простоте этот способ не лишен существенного недостатка — «треугольник Деламбра» не замкнут ни на сфере, ни на плоскости, поскольку сумма углов в нем $180^\circ + \varepsilon/4$ больше 180° . Отсюда следует, что способ Деламбра может применяться только для решения изолированных треугольников и не применим для решения систем смежных треугольников [4].



Сферический и хордовый треугольники.

B' и C' хордового треугольника (см. рисунок). Для малых треугольников эти формулы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} A' &= A - \frac{\varepsilon}{4} (\operatorname{ctg} B' \cdot \operatorname{ctg} C' + 1); \\ B' &= B - \frac{\varepsilon}{4} (\operatorname{ctg} A' \cdot \operatorname{ctg} C' + 1); \\ C' &= C - \frac{\varepsilon}{4} (\operatorname{ctg} A' \cdot \operatorname{ctg} B' + 1). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Треугольник Молоденского является плоским замкнутым и для него справедливы любые формулы плоской тригонометрии. По способу М. С. Молоденского решаются как изолированные треугольники, так и системы смежных треугольников (пространственные сети). Однако поправки в углы сферического треугольника, вычисляемые по формулам (2), не одинаковы по значению, а иногда и по знаку, и зависят от формы треугольника. В том случае, когда углы хордового треугольника существенно отличаются от углов сферического треугольника (например, в остроугольных треугольниках), поправки по формулам (2) вычисляют последовательными приближениями, что вносит определенные неудобства при вычислениях.

Мы предлагаем иной метод решения хордовых «треугольников Деламбра», основанный на их «замыкании» с помощью изменения одного из углов.

Представим на поверхности сфера малый сферический треугольник (см. рисунок) со сферическими углами A , B и C , и известной длиной хорды K_a^* .

Для вывода формул используем известные соотношения (1) и поставим задачу «замкнуть» треугольник Деламбра. В один из углов треугольника — $\left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right)$ — введем дополнительную поправку $-\frac{\varepsilon}{4}$, а для сохранения соотношения (1) уменьшим противолежащую этому углу хорду на величину δK_a . Тогда

$$\frac{K_a - \delta K_a}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{K_b}{\sin \left(B - \frac{\varepsilon}{4}\right)} = \frac{K_c}{\sin \left(C - \frac{\varepsilon}{4}\right)}. \quad (4)$$

Для определения поправки δK_a , сравнивая формулы (1) и (4), запишем очевидное соотношение

$$\frac{K_a - \delta K_a}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{K_a}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right)},$$

или

$$\delta K_a \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right) = K_a \left[\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right) - \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]. \quad (5)$$

Преобразовав разность синусов углов, получим

$$\delta K_a \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right) = 2K_a \sin \frac{\varepsilon}{8} \cdot \cos \left(A - \frac{3\varepsilon}{8}\right),$$

или

$$\delta K_a = 2K_a \frac{\sin \frac{\varepsilon}{8} \cdot \cos \left(A - \frac{3\varepsilon}{8}\right)}{\sin \left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right)}. \quad (6)$$

Разложив тригонометрические функции в ряды и отбросив при этом величину порядка $\frac{\varepsilon^2}{16}$, найдем

$$\delta K_a = \frac{\varepsilon''}{4\rho''} K_a \cdot \operatorname{ctg} A. \quad (7)$$

* Если в треугольнике задана длина геодезической линии a , то хорду K_a можно вычислить по формуле

$$K_a = a - \frac{a^3}{24 R_A^2} + \dots \quad (3)$$

Подставляя формулу (7) в (4), окончательно записываем

$$\frac{K_a - \frac{\epsilon}{4\rho''} K_a \operatorname{ctg} A}{\sin \left(A - \frac{\epsilon}{2} \right)} = \frac{K_b}{\sin \left(B - \frac{\epsilon}{4} \right)} = \frac{K_c}{\sin \left(C - \frac{\epsilon}{4} \right)}. \quad (8)$$

Равенства (8) показывают, что хордовые треугольники можно решать по формулам плоской тригонометрии, если два угла сферического треугольника уменьшить на $-\frac{\epsilon}{4}$, а третий — на $-\frac{\epsilon}{2}$, одновременно уменьшив противоложащую этому углу хорду на величину δK_a (7).

Оценим предельные значения поправки (7). Известно, что

$$\epsilon'' \approx \frac{\rho''}{2R_A^2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A,$$

поэтому

$$\delta K_a \approx \frac{abc}{8R_A^2} \cos A. \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что поправка δK_a будет иметь минимальные значения при углах A , близких к 90° , а в прямоугольном треугольнике поправка в гипотенузу равна 0. Максимальные поправки δK_a будут в треугольниках с углами A , близкими к 180° .

В этом случае

$$\delta K_{a \text{ макс}} \approx -\frac{abc}{8R_A^2}. \quad (10)$$

Но для такого треугольника

$$b \approx c \approx \frac{a}{2},$$

следовательно,

$$\delta K_{a \text{ макс}} \approx -\frac{a^3}{32R_A^2}. \quad (11)$$

Так, при $A \approx 180^\circ$, $a = 200$ км и $R_A \approx 6380$ км $\delta K_a \approx -5,4$ м.

Иными словами, даже в «критическом случае» для вычисления поправки δK_a достаточно получать сферический избыток с тремя значащими цифрами.

По нашему мнению, предлагаемый метод решения хордовых треугольников достаточно прост, удобен для ручного счета и программирования на ЭВМ, дает возможность решать как изолированные треугольники, так и системы треугольников. Поправки вида (7) можно вычислять непосредственно или выбирать из специально составленных таблиц и номограмм (например, сетчатая номограмма плюс номограмма из выравненных точек).

Выбор изменяемой хорды зависит от цели решения. Так, при решении изолированных треугольников желательно изменять известную хорду, а при решении смежных треугольников целесообразно изменять промежуточные хорды. Действительные углы хордовых треугольников при необходимости можно вычислить по полученным значениям длин хорд.

Предлагаемый метод может применяться и для решения линейных хордовых треугольников. При этом вначале вычисляют сферический избыток треугольника ε , затем в одну из хорд вводят поправку вида (7) и по формулам (8) вычисляют углы $\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\left(B - \frac{\varepsilon}{4}\right)$ и $\left(C - \frac{\varepsilon}{4}\right)$.

Формулы для определения сферических углов имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} A &= \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2}; \\ B &= \left(B - \frac{\varepsilon}{4} \right) + \frac{\varepsilon}{4}; \\ C &= \left(C - \frac{\varepsilon}{4} \right) + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Примеры решения треугольника «критической формы» по способам Ж. Деламбра, М. С. Молоденского и автора приведены в табл. 1—4.

Таблица 1
Примеры решения хордового треугольника *

Вершина треугольника	Уравниенные сферические углы	Длины хорд	Вычисление ε
A	5° 03' 34,916"	85 546,76	K_a^2 7 318,2 км ²
B	168° 27' 56,512	193 971,52	$\frac{\sin B \sin C}{\sin A}$ 0,256 42
C	6° 28' 33,320	109 402,24	ε'' 4,748"
Σ	180° 00' 04,748"		$\varepsilon''/4$ 1,187"

* Исходные данные: $B_m = 50^\circ$, $f_m = 0,002532$, $K_a = 85 546,76$

Таблица 2

Решение хордового треугольника по способу Ж. Деламбра

Вершина треугольника	Уравненные сферические углы	$-\frac{\epsilon}{4}$	Приведенные «плоские» углы	Синусы углов	Длины хорд
A	5°03'34,916"	-1,187"	5°03'33,729"	0,08 818 794	85 546,76
B	168 27 56,512	-1,187	168 27 55,325	0,19 996 021	193 971,51
C	6 28 33,320	-1,187	6 28 32,133	0,11 277 995	109 402,25
Σ	180°00'04,748	-3,561	180°00'01,187"		

Таблица 3

Решение хордового треугольника по способу М. С. Молоденского

Вершина треугольника	Уравненные сферические углы	δ_i^*	Приведенные углы хордовых треугольников	Синусы плоских углов	Длины хорд
A	5°03'34,916"	-49,759"	5°04'24,675"	0,08 843 397	85 546,76
B	168 27 56,512	-1 58,637"	168 25 57,875	0,20 051 808	193 971,53
C	6 28 33,320	-1 04,130	6 29 37,450	0,11 309 459	109 402,26
Σ	180°00'04,748"	+ 4,748	180°00'00'000"		

* Окончательные значения поправок δ_i получены после трех последовательных приближений по формулам (2).

Таблица 4

Решение хордового треугольника по способу, предложенному автором

Вершина треугольника	Уравненные сферические углы	$-\frac{\epsilon}{n}$	Приведенные «плоские» углы	Синусы углов	Длины хорд
A	5°03'34,916"	-2,374"	5°03'32,542"	0,08818221	85 546,76
B	168 27 56,512	-1,187	168 27 55,325	0,19996021	193 971,51
C	6 28 13,320	-1,187	6 28 32,133	0,11277995	109 402,25
Σ	180°00'04,478"	-4,478	180°00'00'000"		

Вычисление поправки δK_a

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon''}{4\rho''} &= 5,754 \cdot 10^{-6} \\ \operatorname{ctg} A &= 11,296 \\ \delta K_a &= -5,56 \\ K_a - \delta K_a &= 85 541,20 \end{aligned}$$

* Для углов B и C — n=4; для угла A — n=2.

Список литературы: 1. Буткевич А. В. Исследования по решению вычислительных задач сфероидической геодезии. М., Недра, 1964. 2. Гельмерт Ф. Р. Математические и физические теории высшей геодезии. Т. 1. Математические теории. М., Геодезиздат, 1962. 3. Изотов А. А. Основы спутниковой геодезии. М., Недра, 1974. 4. Колесов А. А. Вычисление длин и азимутов хорд замыкающих на сфереиде на основе теоремы Деламбра. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1976, № 6. 5. Молоденский М. С. Новый метод решения геодезических задач. — Тр. ЦНИИГАиК, 1954, вып. 103. 6. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. М., Недра, 1969. 7. Ryšavy I. Vyšší geodesie. Praha, 1947.

Работа поступила 17 апреля 1978 года.
Рекомендована кафедрой геодезии Кузбасского политехнического института.