УДК 528.33.35

В. В. ЛОЗИНСКИЙ
Львовский государственный университет

ПОПЕРЕЧНЫЙ СДВИГ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО РЯДА ИЗ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В настоящей статье детально исследован вопрос получения формулы для обратного веса направления диагонали ряда. Как и в работе [1], где предложены формулы для оценки точности рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции,

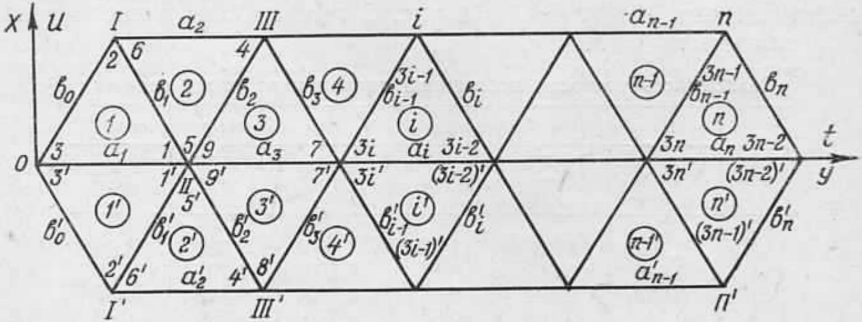

Схема линейно-углового ряда из центральных систем.

предполагаем, что ряд состоит из центральных систем, образованных равносторонними треугольниками с измеренными углами и сторонами.

В свободном ряду линейно-угловой триангуляции (рисунок) при уравнивании по методу условных измерений возникает $4N+2$ условных уравнений фигур (N — число центральных систем в ряду)

$$(3i-2)+(3i-1)+(3i)+w_\Phi=0, \tag{1}$$

$8N+4$ синусных условных уравнений

$$-\delta(3i-2)+\delta(3i-1)+\left(\frac{(b_{i-1})}{b_{i-1}}\right)-\left(\frac{(a_i)}{a_i}\right)+w_a=0; \quad (2)$$

$$-\delta(3i-2)+\delta(3i)+\left(\frac{(b_{i-1})}{b_{i-1}}\right)-\left(\frac{(b_i)}{b_i}\right)+w_b=0 \quad (3)$$

и N условных уравнений горизонта

$$(3i-2)+(3i-1)+(3i)+(3i)'+(3i-1)'+(3i-2)')+w_c=0, \quad (4)$$

где i — порядковый номер треугольника в верхнем ряду; $(3i)$, $(3i-1)$, $(3i-2)$ — вероятнейшие поправки к углам, выраженные в радианной мере (в нижнем ряду треугольников углы обозначаются теми же числами, что и в верхнем, но только со штрихами); (a_i), (b_i), (b_{i-1}), — вероятнейшие поправки к измеренным сторонам; $\delta=\operatorname{ctg} 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$; w — известные свободные члены.

Весовую функцию поперечного сдвига запишем в виде

$$dF_{u_n}=\frac{S\sqrt{3}}{2}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{(b_i)}{b_i}\right)(-1)^i+\frac{S}{2}\times$$
$$\times[n(2)-(n-1)(5)+(n-2)(8)-\cdots], \quad (5)$$

где n — число треугольников в верхнем ряду; S — длина стороны треугольника.

При решении нормальных уравнений погрешности угловых измерений в радианах и относительные линейные считались равноточными.

Решение нормальных уравнений выполнялось по методу двух групп. В первую группу были включены условные уравнения фигур вида (1), во вторую — все остальные уравнения. Преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы вычисляли по формулам [2]:

$$a_i=a_i'-\frac{[a_i']}{3} - \text{(при поправках в углы)};$$

$$a_i=a_i' - \text{(при поправках в стороны)}.$$

Обозначим преобразованные коэффициенты в уравнениях (2), (3), (4) соответственно через a_i, b_i, c_k $(k=1, 2, 3, \ldots, N)$, а коэффициенты весовой функции через f_u.

Обратный вес функции поперечного сдвига определится по формуле

$$\frac{1}{P_{f_u}}=[f_u f_u]-\sum_{1}^{n}\frac{[a_i f_u(i-1)]^2}{[a_i a_i(i-1)]}-\sum_{i=1,3,5\cdots}^{n}\times$$
$$\times\frac{[a_i' f_u(n+i-1)]^2}{[a_i' a_i'(n+i-1)]}-\cdots$$

Квадратичный коэффициент нормальных уравнений для весовой функции

$$[f_u f_u] = \frac{1}{9}(4N^3 + 9N^2 + 20N + 15)\, S^2. \qquad (6)$$

Из решения нормальных уравнений получим необходимые коэффициенты для определения обратного веса функции направления диагонали. Первые n синусных уравнений вида (2) для верхнего ряда треугольников не имеют общих поправок, поэтому

$$[a_1 a_1] = [a_2 a_2 \cdot 1] = \cdots = [a_i a_i (i-1)] = 2{,}6667;$$
$$[a_i f_u (i-1)] = 0{,}2887 (n+4-i)(-1)^{i+1} S.$$

Для нижнего ряда треугольников коэффициенты этого вида уравнений (для нечетных i) будут:

$$[a_i' a_i' (n+i-1)] = 2{,}2917;\ [a_i' f_u (n+i-1)] = -0{,}10825 (n+4-i) S.$$

Квадратичные коэффициенты уравнений вида (3) для верхнего ряда треугольников

$$[b_1 b_1 \cdot 2n] = 1{,}5159;\ [b_2 b_2 (2n+1)] = 1{,}3987.$$

Все последующие коэффициенты этого вида, кроме последнего, с ошибкой не более 1—3%, можно принять:

для четных i $[b_i b_i (2n+i-1)] = 1{,}3835$;
для нечетных i $[b_i b_i (2n+i-1)] = 1{,}3899$.

Последний квадратичный коэффициент уравнений вида (3) $[b_n b_n (3n-1)] = 1{,}7649$.

Для нижнего ряда треугольников квадратичные коэффициенты уравнений вида (3) имеют вид:

$$[b_1' b_1' \cdot 3n] = 1{,}4528;\ [b_2' b_2' (3n+1)] = 1{,}344.$$

В общем виде с ошибкой не более 0,5% примем:

для нечетных i при $3 \leqslant i < n$ $[b_i' b_i' (3n+i-1)] = 1{,}3429$;
для четных i при $2 < i < n$ $[b_i' b_i' (3n+i-1)] = 1{,}3316$.

Последний квадратичный коэффициент $[b_n' b_n' (4n-1)] = 1{,}727$.

Квадратичные коэффициенты уравнений типа (4) с ошибкой, не превышающей 1—3%, выразятся следующим образом:

$$[c_1 c_1 \cdot 4n] = 3{,}127;\ [c_k c_k (4n + k - 1)] = 3{,}127 - \frac{0{,}3333}{C_{k-1}},$$

где $C_{h-1} = [c_{h-1} \cdot c_{h-1} (4n+k-2)]$.

Определим суммарное влияние уравнений вида (2) для верхнего ряда треугольников на обратный вес функции поперечного сдвига

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{[a_i f_u(i-1)]^2}{[a_i a_i(i-1)]} = (0{,}0833N^3 + 0{,}5625N^2 + 1{,}2604N + 0{,}5)\, S^2. \tag{7}$$

Суммарное влияние этого же вида уравнений для нижнего ряда треугольников

$$\sum_{i=1,3\ldots}^{n} \frac{[a_i' f_u(n+i-1)]^2}{[a_i' a_i' (n+i-1)]} = (0{,}0068N^3 + 0{,}0511N^2 + 0{,}126N + 0{,}0818)\, S^2. \tag{8}$$

Запишем выражения для определения коэффициентов уравнений вида (3) и весовой функции для верхнего ряда треугольников:

$$[b_1 f_u 2n] = (1{,}0117 - 0{,}2762n)\, S; \quad [b_2 f_u (2n+1)] = (-0{,}9837 + 0{,}1792n)\, S.$$

В общем случае ($2<i<n$) для практических целей эти коэффициенты с ошибкой 1—3% достаточно вычислять по формулам:

для нечетных i $[b_i f_u (2n+i-1)] = [0{,}6006 - 0{,}2185(n-i)]\, S$;
для четных i $[b_i f_u (2n+i-1)] = [-0{,}6391 + 0{,}1916(n-i)]\, S$.

Последний коэффициент этого вида уравнений $[b_n f_u (3n-1)] = 0{,}925S$.

Суммарное влияние уравнений вида (3) для верхнего ряда треугольников на величину обратного веса после преобразований с точностью 1—2% определится выражением

$$\sum_{1}^{n} \frac{[b_i f_u (2n+i-1)]^2}{[b_i b_i (2n+i-1)]} = (0{,}0812N^3 - 0{,}2475N^2 + 0{,}2695N + 0{,}5465)\, S^2. \tag{9}$$

Неквадратичные коэффициенты уравнений вида (3) и весовой функции для нижнего ряда треугольников с достаточной точностью вычисляют по формулам:

$$[b_1' f_u \cdot 3n] = (0{,}0433 + 0{,}1073n)\, S; \quad [b_2' f_u (3n+1)] = (0{,}1924 - 0{,}0518n)\, S.$$

Далее, для $2<i<n-1$ с допустимой точностью можно принять:

для четных i

$$[b_i' f_u (3n+i-1)] = [0{,}0862 - 0{,}0481(n-i)]\, S;$$

для нечетных i

$$[b_i' f_u (3n+i-1)] = [0{,}1276 + 0{,}1035(n-i)]\, S.$$

При $i=n-1$

$$[b_{n-1}'f_u(4n-2)]=0{,}0789S.$$

Последний неквадратичный коэффициент этого вида уравнений $[b_n'f_u(4n-1)]=0{,}0824S.$

Зная квадратичные и неквадратичные коэффициенты уравнений вида (3) и весовой функции для нижнего ряда треугольников, после ряда преобразований получаем суммарное влияние этих уравнений и весовой функции на обратный вес

$$\sum_1^n \frac{[b_i' f_u(3n+i-1)]^2}{[b_i' b_i'(3n+i-1)]} =$$
$$= (0{,}013N^3 + 0{,}0302N^2 + 0{,}045N + 0{,}0086)\,S^2. \qquad (10)$$

Для уравнений типа (4) и весовой функции первый квадратичный коэффициент

$$[c_1f_u\cdot 4n]=(0{,}0434-1{,}0252N)\,S.$$

Последующие коэффициенты такого типа уравнений с допустимой точностью определяют из следующего выражения:

$$[c_kf_u(4n+k-1)]=-[1{,}5137+1{,}1791\,(N-k)]\,S.$$

Следовательно, суммарное влияние уравнений типа (4) и весовой функции на обратный вес будет:

$$\sum_1^k \frac{[c_k f_u(4n+k-1)]^2}{[c_k c_k(4n+k-1)]} =$$
$$= (0{,}1534N^3 + 0{,}2366N^2 - 0{,}0453N - 0{,}0365)\,S^2. \qquad (11)$$

Зная решение уравнений (6)—(11), получаем формулу обратного веса функции поперечного сдвига ряда, состоящего из центральных систем

$$\frac{1}{P_{f_u}} = [0{,}1067N^3 + 0{,}3671N^2 + 0{,}5666\,(N+1)]\,S^2. \qquad (12)$$

Для проверки формулы (12) были решены численные примеры по схеме Гаусса.

Значения обратных весов

N	По схеме Гаусса	По формуле (12)	Погрешность, %
1	1,5581	1,6070	3,14
2	4,0740	4,0218	1,28
3	8,5989	8,4512	1,72
4	15,6978	15,5354	1,04
5	25,9414	25,9146	0,10
6	39,9013	40,2290	0,83

В таблице приведены значения обратных весов $\frac{1}{P_u}$, полученных из решения схемы Гаусса и по формуле (12).

Как видно из приведенных вычислений, погрешности в определении обратных весов по формуле (12) невелики и этой формулой, как и формулой, предложенной в работе [1], вполне можно пользоваться при оценке точности проектируемых сетей указанного вида.

Список литературы: 1. *Монин И. Ф.* Предвычисление точности рядов из центральных систем линейно-угловой триангуляции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1976, вып. 24. 2. *Проворов К. Л.* Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1959, № 3.

Работа поступила 21 апреля 1978 года.
Рекомендована кафедрой геоморфологии
Львовского государственного университета.