УДК 528.3

*Б. М. ДЖУМАН*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ПРИ НЕЙТРАЛЬНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ ВОЗДУХА

В работе [1] показано, что в периоды спокойных изображений при наличии ветра величина коэффициента рефракции остается практически постоянной для различных линий нивелирования в слое воздуха толщиной 100—200 м.

Естественно, что это равноценно постоянству вертикального градиента показателя преломления или градиента плотности в данном ограниченном слое. Учитывая эти выводы и используя метод вариационного исчисления, можем получить формулу для частного угла рефракции или коэффициента рефракции.

Рассматриваем задачу геометрической оптики в плоскости и записываем:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} n(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (1)$$

Если показатель преломления $n$ не зависит от $x$ (от расстояния), а зависит только от $y$ (от высоты), то

$$n = c\sqrt{1 + y'^2}, \qquad (2)$$

где $c$ — постоянная интегрирования.

Используя формулу Лоренц—Лорентца, выражающую зависимость показателя преломления от плотности воздуха, и принимая, что вертикальный градиент плотности $\frac{d\rho}{dy}$ для исследуемого слоя является величиной постоянной,

$$n^2 = n_0^2 + c_0 \frac{d\rho}{dy} y, \qquad (3)$$

где $n_0$ — показатель преломления воздуха при давлении $P = 760$ мм рт. ст. и температуре $T = 273°$, 2; $c_0$ — некоторая постоянная, зависящая от физико-химических свойств воздуха.

Возводя в квадрат правую и левую части формулы (2) и подставляя значение $n^2$ в (3), после некоторых преобразований получаем:

$$y' = \sqrt{\frac{n_0^2 - c^2 + c_0 \frac{d\rho}{dy} y}{c^2}}. \qquad (4)$$

Откуда
$$\frac{dy}{\sqrt{n_0^2 - c^2 + c_0 \frac{d\rho}{dy} y}} = \frac{dx}{c}. \tag{5}$$

Интегрируя (5) и решая относительно $y$, получаем уравнение световой кривой в плоскости

$$y = \frac{n_0^2 - c^2}{c_0 \frac{d\rho}{dy}} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{c} - c_1\right)^2 c_0 \frac{d\rho}{dy}. \tag{6}$$

Принимая координаты начальной и конечной точки визирного луча соответственно равными (0,0) и (0,$S$), находим из уравнения (6) постоянную интегрирования

$$c^2 = \frac{n_0^2}{2} + \sqrt{\frac{n_0^4}{4} - \frac{c_0^2}{16}\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 S^2}. \tag{7}$$

Учитывая (7) и полагая в формуле (4) $y=0$, а также принимая во внимание, что плотность воздуха с высотой уменьшается, после некоторых преобразований получаем

$$-\frac{d\rho}{dy} = \frac{4n_0^4 y'}{c_0 S (1 + y'^2)}. \tag{8}$$

Заменяя в формуле (8) $y'$, в связи с малостью частного угла рефракции, значением $\frac{\Delta z''}{\rho''}$ и принимая $\frac{n_0^4}{1 + y^{12}} \approx 1$, получаем

$$-\frac{c_0}{2} \frac{d\rho}{dy} = \frac{2\Delta z''}{S\rho''}. \tag{9}$$

Сделаем еще некоторые преобразования левой части соотношения (9).

Дифференцируя по высоте (по $y$) уравнение состояния сухого воздуха $P = \rho R_B T$, а также используя основное уравнение статики атмосферы $\frac{d\rho}{dy} = -g\rho$, записываем

$$\frac{d\rho}{dy} = -\frac{\rho}{T}\left(\frac{g}{R_B} + \gamma\right), \tag{10}$$

где $g$ — ускорение силы тяжести; $R_B$ — газовая постоянная для сухого воздуха, равная 286,86 м²/сек²·град; $\gamma$ — вертикальный градиент температуры.

Подставляя (10) в (9) и заменяя $g$ и $R_B$ их численными значениями, получаем

$$\frac{c_0 \rho}{2T}(0{,}0342 + \gamma) = \frac{2\Delta z''}{S\rho''}. \tag{11}$$

Теперь, умножая обе части равенства (11) на средний радиус Земли $R = 6\,371$ км и заменяя $c_0$ его значением $\frac{0{,}000\,585}{\rho_0}$, после некоторых преобразований получаем окончательно

$$668{,}7\,\frac{P}{T^2}(0.0342 + \gamma) = \frac{2R}{S}\,\frac{\Delta z''}{\rho''}. \tag{12}$$

Уравнение (12) получено для горизонтальных лучей (при $z \approx 90°$).

Из этого уравнения видно, что для построенной нами модели атмосферы, которая близка к ее состоянию в периоды спокойных изображений при ветре, коэффициенты рефракции, вычисленные по разностям измеренных и теоретических зенитных расстояний (правая часть равенства), равны их величинам, полученным по формуле нормальной рефракции (левая часть равенства). Поэтому формулу (12) можно записать в таком виде:

$$\gamma = \frac{kT^2}{668.7\,P} - 0.0342, \tag{13}$$

где $k$ — коэффициент рефракции, полученный из наблюдений зенитных расстояний по правой части равенства (12).

Для вычисления $\gamma$ использованы материалы экспериментальных исследований, выполненных автором в 1964—1966 гг. [1]. По данным материалам вычислен средний коэффициент рефракции $k = 0{,}149 \pm 0{,}002$.

Так как измерения зенитных расстояний выполнялись касанием горизонтальной нити на верх визирного цилиндра, то в коэффициенты рефракции предварительно были введены поправки за толщину горизонтальной нити, которая в нашем случае равна $1'',3$.

Тогда для средних значений $T = 290°$ и $P = 740$ мм рт. ст., мы получаем $\gamma = -0{,}0082$ град/м с ошибкой $m\gamma = \pm 0{,}0001$ град/м.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Джуман Б. М. О точности измерения зенитных расстояний в периоды спокойных изображений при ветре. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1966, вып. 4.

**Работа поступила в редколлегию 10 мая 1973 г. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского политехнического института.**