Список литературы: 1. *Александров Н. Н. и др.* Расчеты точности топографических съемок в районах орошения. — М.: Геодезиздат, 1956. 2. *Батраков Ю. Г.* Исследование точности съемки рельефа для составления проектов вертикальной планировки орошаемых площадей / Труды Московского ин-та инженеров землеустройства, 1959, вып. 3. 3. *Большаков В. Д.* Обобщение рельефа при съемках в крупных масштабах (1 : 2000, 1 : 10 000, 1 : 500) / Труды Московского ин-та инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии, 1958, вып. 33. 4. *Видуев Н. Г., Гржибовский В. П.* Геодезическое проектирование вертикальной планировки. — М.: Недра, 1964. 5. *Скиданенко К. К.* Исследование точности съемки аэродромного рельефа и определения объемов земляных масс по квадратам. — Л., 1951.

Статья поступила в редколлегию 29.10.81

УДК 629.783: [528.2+528.344]

А. Н. МАРЧЕНКО

О ДИНАМИЧЕСКОМ МЕТОДЕ СПУТНИКОВОЙ ГЕОДЕЗИИ

Значительное увеличение в последнее время точности наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ) привело к постановке и решению ряда новых задач в теоретической и практической областях космической геодезии. В рамках динамического метода — это необходимость использования экономически выгодных численных методов интегрирования уравнений движения ИСЗ, которые по сравнению с аналитическими имеют меньшие методические погрешности и дают за счет этого более точные результаты [14]. Последнее влечет за собой поиск более удобных с точки зрения численных методов форм описания геопотенциала и, как следствие, — решение проблемы математически однородного представления как длинноволновой, так и коротковолновой структуры гравитационного потенциала V планеты.

Предварительные исследования показали, что нормальный потенциал U, например, в виде суммы шаровых функций нулевого и второго порядков может быть очень точно описан [7] суммой потенциалов одной центральной точечной массы, величина которой равна массе Земли и четырехточечных масс приближенной конструкции квадриполя

$$U=\sum_{i=1}^{5} m_i'\frac{1}{r_i}, \tag{1}$$

лежащих на главных осях A и C инерции планеты. Для возмущающего потенциала $T=V-U$ справедлива сколь угодно точная аппроксимация [1, 4] равномерно сходящимся рядом

$$T=\sum_{i=1}^{\infty} m_i^*\frac{1}{r_i} \tag{2}$$

потенциалов $\frac{m_i^*}{r_i}$ точечных масс m_i^*, расположенных на некоторой

поверхности σ_A, лежащей внутри сферы Бьерхаммара. Значит, с учетом (1), (2) возможно математически однородное представление V в форме

$$V=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{m_i}{r_i}, \tag{3}$$

где r_i — расстояние от точечной массы m_i до текущей точки. В выражениях (1)—(3) точечные массы m_i', m_i^* и m_i соответственно описывают нормальный U, возмущающий T и гравитационный потенциал $V=U+T$ планеты, а системы функций $\left\{\frac{1}{r_i}\right\}$ в (1)—(3) предполагаются одинаковыми (т. е. для (1), (2), (3) координаты соответствующих индексу i точечных масс равны). Причем на основании (1) из $T=V-U$ следует, что $m_i^*=0$ при $i=1, 2, \ldots 5$, а $m_i'=0$ для $5\leqslant i\leqslant\infty$ и, тогда в общем случае $m_i=m_i'+m_i^*$.

Использование (3) позволяет успешно решать вопрос детализации гравитационного поля по мере поступления новой измерительной информации, без пересчета определенных ранее параметров многоточечной модели путем добавления отдельных точечных масс. Кроме того, при прогнозировании положений ИСЗ методами численного интегрирования уравнений движения применение (3) — взамен классического ряда по шаровым функциям — значительно сокращает [12] время вычислений на ЭВМ.

Несмотря на имеющийся недостаток описания (3), который заключается в определенной сложности* нахождения параметров точечных масс по сравнению с определением стоксовых постоянных C_{nm}, S_{nm}, в данной работе задача изложения динамического метода космической геодезии поставлена именно с применением описания (3) вместо разложения геопотенциала по сферическим гармоникам, поскольку его преимущества (отмеченные выше) весьма существенны. При этом основной упор делался на последующее использование численных методов спутниковой геодезии.

Для получения устойчивых решений в качестве основы для построения соответствующего алгоритма определения величин m_i точечных масс из наблюдений ИСЗ взят метод регуляризации А. Н. Тихонова [9] решения некорректных задач.

Будем исходить из возможной трактовки [13] каждого спутникового наблюдения l (например, топоцентрической дальности и т. п.) как нелинейного функционала S вида

$$S=S(\tilde{X}, V), \tag{4}$$

* Отмечаемый факт связан как с неортогональностью базисной системы функций $\left\{\frac{1}{r_i}\right\}$, так и с неоднозначностью ее выбора [5].

в котором в качестве функции V принимается гравитационный потенциал Земли, а $\tilde{X}$ — есть вектор с определенным числом элементов

$$\tilde{X}=(x_Q,\ y_Q,\ z_Q;\ Э_1^0,\ Э_2^0,\ \dots Э_6^0;\ t_0, t, p_i). \tag{5}$$

В (5) x_Q, y_Q, z_Q — координаты станции наблюдения; $Э_1^0$, $Э_2^0, \dots Э_6^0$ — компоненты вектора состояния ИСЗ (например, кеплеровы элементы) в некоторую начальную эпоху t_0, t — момент времени наблюдения; p_i $(i=1, 2, \dots k)$ — параметры, характеризующие влияние негравитационных сил.

Линеаризация (4) приводит к выражению [13]

$$dS=S-S(\tilde{X}_0,\ U)=\tilde{a}^T X+\tilde{B}T, \tag{6}$$

в котором вектор $\tilde{a}=[a_j]$ состоит из производных

$$a_j=\frac{\partial S}{\partial \tilde{X}_j}(\tilde{X}_0, U), \tag{7}$$

S по соответствующим компонентам $\tilde{X}_j$ вектора $\tilde{X}$ (5), известным приближенно; U — нормальный потенциал; $\tilde{B}$ — линейный оператор, действующий на возмущающий потенциал T $(T=V-U)$, X — вектор поправок к приближенным значениям параметров $\tilde{X}_0$.

Предполагая далее, что нормальный потенциал U представлен соотношением (1), возмущающий потенциал T — выражением (2) и обозначая через $L=\{l-S(\tilde{X}_0, U)\}$ — вектор, полученный как разность n спутниковых наблюдений и их «вычисленных» значений, находим из (1)—(4), (6), (7) следующую систему n линейных уравнений

$$AX+\tilde{B}T-L=v \tag{8}$$

для определения элементов вектора X и величин точечных масс m_i^*, число которых в практической ситуации, естественно, принимается конечным. В (8) вектор v характеризует ошибки измерений и определяется заданной ковариационной матрицей C_{nn}.

Чтобы уточнить вид элементов матрицы A и линейного оператора $\tilde{B}$, по-видимому, необходимо конкретизировать тип спутниковых наблюдений. Последнее имеется в литературе во многих формах, правда, для определения гармонических коэффициентов геопотенциала. Поэтому воспользуемся известными [3] рассуждениями, но применительно к (1)—(3).

Предположим (не ограничивая общности построений *), что в качестве l далее подразумеваются лазерные или фотографические наблюдения. Обозначим через

* Если в расчет будут приниматься наблюдения скорости (например, доплеровские), то возникает необходимость дополнительного дифференцирования по времени.

$$\left.\begin{aligned}\delta x&=x-x_Q\\ \delta y&=y-y_Q\\ \delta z&=z-z_Q\end{aligned}\right|,\qquad \left.\begin{aligned}d\delta x&=dx-dx_Q\\ d\delta y&=dy-dy_Q\\ d\delta z&=dz-dz_Q\end{aligned}\right|, \tag{9}$$

где x, y, z — прямоугольные координаты ИСЗ в инерциальной координатной системе, причем имеет место соотношение

$$\left.\begin{matrix}x\\ y\\ z\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{matrix}\right\}(Э_1^0,\ Э_2^0,\ \dots Э_6^0;\ t_0,\ t;\ p_i;\ m_i), \tag{10}$$

в котором $(Э_1^0, Э_2^0, \dots Э_6^0)$ характеризует начальный вектор состояния, m_i — величины точечных масс, описывающих геопотенциал V. Таким образом, выражение (10) устанавливает функциональную зависимость между определенным числом указанных параметров и координатами ИСЗ в инерциальной системе координат.

Так как каждое спутниковое наблюдение l связано не только с координатами ИСЗ x, y, z, но и с координатами x_Q, y_Q, z_Q станции наблюдения, то представим теперь величину dS в виде

$$dS=\frac{\partial S}{\partial \delta x}d\delta x+\frac{\partial S}{\partial \delta y}d\delta y+\frac{\partial S}{\partial \delta z}d\delta z \tag{11}$$

или, с учетом (9), — в более наглядной форме

$$dS=\left(\frac{\partial S}{\partial \delta x}dx+\frac{\partial S}{\partial \delta y}dy+\frac{\partial S}{\partial \delta z}dz\right)-\left(\frac{\partial S}{\partial \delta x}dx_Q+\frac{\partial S}{\partial \delta y}dy_Q+\frac{\partial S}{\partial \delta z}dz_Q\right). \tag{12}$$

Воспользовавшись зависимостью (10) для вычисления dx, dy, dz, после их подстановки в (12) путем несложных преобразований найдем, что

$$\begin{aligned}dS=&\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{\partial S}{\partial \delta x}\cdot\frac{\partial x}{\partial Э_i^0}+\frac{\partial S}{\partial \delta y}\cdot\frac{\partial y}{\partial Э_i^0}+\frac{\partial S}{\partial \delta z}\cdot\frac{\partial z}{\partial Э_i^0}\right)dЭ_i^0+\\ &+\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial S}{\partial \delta x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p_i}+\frac{\partial S}{\partial \delta y}\cdot\frac{\partial y}{\partial p_i}+\frac{\partial S}{\partial \delta z}\cdot\frac{\partial z}{\partial p_i}\right)dp_i-\\ &-\left(\frac{\partial S}{\partial \delta x}dx_Q+\frac{\partial S}{\partial \delta y}dy_Q+\frac{\partial S}{\partial \delta z}dz_Q\right)+\\ &+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial S}{\partial \delta x}\cdot\frac{\partial x}{\partial m_i}+\frac{\partial S}{\partial \delta y}\cdot\frac{\partial y}{\partial m_i}+\frac{\partial S}{\partial \delta z}\cdot\frac{\partial z}{\partial m_i}\right)dm_i.\end{aligned} \tag{13}$$

Первые три строки (13) представляют собой элементы вектора $\tilde{a}$ из (6), а последняя строка есть выражение линейного функционала $\tilde{B}T$ спутниковых наблюдений в виде линейной комбинации соответствующих частных производных на величины dm_i, которые подлежат определению. При практических вычислениях, в случае усечения ряда (2), (3) до некоторого N линейный оператор $\widetilde{B}$ оказывается конечно-мерной матрицей B размерностью $(n \times N)$, элементы которой вычисляются на основании (13). Производные $\frac{\partial S}{\partial \delta x}$, $\frac{\partial S}{\partial \delta y}$, $\frac{\partial S}{\partial \delta z}$, фигурирующие в (13), могут быть получены для каждого типа наблюдений в аналитическом виде. Так, в случае лазерных наблюдений S мы имеем следующие известные выражения:

$$\frac{\partial S}{\partial \delta x} = \frac{\delta x}{r}, \; \frac{dS}{\partial \delta y} = \frac{\delta y}{r}, \frac{\partial S}{\partial \delta z} = \frac{\partial z}{r}, \; r = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}. \tag{14}$$

Остальные производные из (13) наиболее целесообразно определять численно, например, методом вариации [10], который хорошо зарекомендовал себя на практике.

Таким образом, вычисляя величину dS как разность $dS = l - S(\widetilde{X}_0, U)$ и приняв нормальный потенциал U в виде (1), отметим, что в такой ситуации величины dm_i из (13) практически будут представлять собой значения m_i^* из разложения (2) возмущающего потенциала T (т. е. $m_i^* = dm_i$), который введен здесь именно при линеаризации спутникового функционала $S = S(\widetilde{X}, V)$. Поэтому, записывая (13) в форме

$$AX + BM - L = v, \tag{15}$$

где матрица A имеет размерность $[n \times (6+k+3c)]$ *; B — размерность $(n \times N)$; v — вектор $(n \times 1)$; L — вектор $(n \times 1)$, — имеем n параметрических уравнений и по методу наименьших квадратов (МНК) можем определить искомые величины $d\text{Э}_i^0$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$, dp_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, dx_Q, dy_Q, dz_Q (для каждой станции наблюдения), m_i^* $(1 \leqslant i \leqslant N)$.

Теперь имеет смысл более детально обсудить некоторые особенности решаемой задачи. Так, при достаточном количестве наблюдений аппроксимация по МНК возмущающего потенциала T с помощью (15), естественно, приведет к его наилучшему представлению на высотах ИСЗ. А вычисляемые по полученным коэффициентам m_i^* значения T на поверхности планеты могут быть далеки от реальной картины, ибо возникающая в такой ситуации проблема аналитического продолжения геопотенциала вниз есть проблема неустойчивая [11]. Кроме того, несмотря на линейную независимость [2, 4] выбранных неортогональных функций $\left\{\frac{1}{r_i}\right\}$, получаемая из (15) система нормальных уравнений может оказаться плохо обусловленной как в силу «ненадежности» [2] системы $\left\{\frac{1}{r_i}\right\}$ фундаментальных решений уравнения Лапласа, так и в связи с наличием ошибок измерений. Поэтому имеет смысл рассматривать обсуждаемую задачу как некорректную и применить для ее решения метод регуляризации А. Н. Тихонова [9], выбрав в качестве стабилизатора квадрат нормы $\|T\|_q^2$ возмущающего потенциала T (представляемого здесь с помощью (2)) на гильбертовом пространстве $\Gamma_2^q(\Sigma)$ с воспроизводящим ядром [8].

Тогда задача сведется к минимизации сглаживающего функционала

$$\Phi_\alpha = v^T C_{nn}^{-1} v + \alpha M^T F M, \tag{16}$$

где F — матрица $(N \times N)$, характеризующая $\|T_N\|_q^2$ [5, 6] (через T_N обозначена сумма первых N членов ряда (2)), α — параметр регуляризации, который вычисляется, например, по «невязке» [8, 9].

$$v_\alpha^T C_{nn}^{-1} v_\alpha = nd, \tag{17}$$

(d — дисперсия результатов наблюдений).

После подстановки (15) в (16) путем дифференцирования по X и M можно получить следующие матричные уравнения, разрешающие поставленную задачу:

$$\left.\begin{aligned} &(A^T C_{nn}^{-1} A) X + (A^T C_{nn}^{-1} B) M - A^T C_{nn}^{-1} L = 0; \\ &(B^T C_{nn}^{-1} A) X + (B^T C_{nn}^{-1} B + \alpha F) M - B^T C_{nn}^{-1} L = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Таким образом, на основании (18) находим

$$\left.\begin{aligned} X &= [N_{11} + N_{12}(N_{22} + \alpha F)^{-1} N_{21}]^{-1} (U_1 - N_{12}(N_{22} + \alpha F)^{-1} U_2), \\ M &= (N_{22} + \alpha F)^{-1} (U_2 - N_{21} X), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где параметр α определяется по (17). В соотношениях (19) приняты для удобства следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} N_{11} &= A^T C_{nn}^{-1} A; & N_{22} &= B^T C_{nn}^{-1} B; \\ N_{12} &= A^T C_{nn}^{-1} B; & U_1 &= A^T C_{nn}^{-1} L; \\ N_{21} &= B^T C_{nn}^{-1} A; & U_2 &= B^T C_{nn}^{-1} L; \end{aligned}\right| \tag{20}$$

которые введены в [15] для описания второй модели коллокации. Отметим, что полученные выражения для определения X и M по форме напоминают решение для параметрической части X и сигнала s в рамках упомянутой второй модели коллокации. Однако в (19) присутствует параметр регуляризации α, а на «месте» матрицы C_{ss}^{-1} фигурирует матрица F, которая может быть рассчитана с помощью уже полученных ранее [5, 6] замкнутых соотношений для $\|T_N\|_q^2$ в случае конкретно заданного q $(1 \leqslant q \leqslant 2{,}5)$.

[1] Здесь c — число станций наблюдений.

При реализации на практике полученного алгоритма (19) необходимо учесть также следующие условия, связывающие коэффициенты m_i^*: сумма их величин должна равняться нулю, а центр масс создаваемой многоточечной модели целесообразно совместить с центром масс Земли. В отдельных случаях имеет смысл учитывать также (кроме гармоник нулевого и первого порядков) и те гармонические коэффициенты геопотенциала, которые уже достаточно надежно определены к настоящему времени и считаются фундаментальными геодезическими постоянными. Поэтому в общем случае будем полагать, что нам задано t условных уравнений $(t<N)$

$$GM = W, \tag{21}$$

где элементы матрицы $G=[g_{ij}]_{t,N}$ размерностью $(t\times N)$ представлены в виде

$$g_{ij} = \frac{1}{fM}\left(\frac{d_i}{a}\right)^n \frac{\bar{P}_n^m(\cos\vartheta_i)}{2n+1} \left\{\begin{matrix}\cos m\lambda_i\\ \sin m\lambda_i\end{matrix}\right. , \tag{22}$$

а элементы вектора $W(t\times 1)$ — суть те нормированные гармонические коэффициенты $\bar{C}_{nm}$, $\bar{S}_{nm}$ геопотенциала, с которыми требуется на основании (21), (22) согласовать величины m_i^*. В (22) d_i, ϑ_i, λ_i — полярные координаты i-ой точечной массы; a — большая полуось общеземного эллипсоида; $\bar{P}_n^m(\cos\vartheta_i)$ — нормированная присоединенная функция Лежандра; fM — произведение гравитационной постоянной на массу планеты; индекс j выражает порядковые номера учитываемых гармоник $\bar{C}_{nm}$, $\bar{S}_{nm}$.

Составим теперь вспомогательную функцию (Лагранжа) в следующей форме:

$$\Phi_\alpha = v^T C_{nn}^{-1} v + \alpha M^T F M + 2K^T(GM - W), \tag{23}$$

где K — вектор $(t\times 1)$ неопределенных множителей Лагранжа (коррелат). Тогда Φ_α (после дифференцирования и необходимых преобразований) имеет относительный минимум при

$$\left.\begin{aligned} X &= [N_{11} + N_{12}(QG^T RGQ - Q)N_{21}]^{-1}\cdot\{U_1 - \\ &\quad - N_{12}[QG^T RW - (QG^T RGQ - Q)U_2]\}; \\ M &= Q\{G^T R[W - GQ(U_2 - N_{21}X)] + U_2 - N_{21}X\}, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где

$$\left.\begin{aligned} Q &= (N_{22} + \alpha F)^{-1}; \\ R &= [G(N_{22} + \alpha F)^{-1} G^T]^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

а параметр регуляризации α, входящий в (25), (24), можно найти с помощью соотношения (17).

При изучении же гравитационного потенциала в глобальном масштабе, что соответствует главным образом спутниковым наблюдениям, имеется возможность [8] положить значение $\alpha=1$ в том случае, если асимптотика выбранного воспроизводящего ядра, определяющего вид матрицы F [5, 6], близка или совпадает со спектром степенных дисперсий возмущающего потенциала T. Последнее, в частности, приводит к выбору воспроизводящего ядра С. Чернинга—Р. Раппа [16] и полученных в [6] соответствующих замкнутых выражений для вычисления элементов матрицы F. При $\alpha=1$ с помощью алгоритма (24) сравнительно просто можно получать устойчивое решение задачи отыскания координат станций и выбранных параметров геопотенциала m_i^* по результатам спутниковых наблюдений.

Список литературы: 1. *Алексидзе М. А.* Об одном представлении аномального гравитационного поля. — ДАН СССР, 1966, т. 170, № 4. 2. *Алексидзе М. А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. — М.: Наука, 1978. 3. *Краснорылов И. И., Плахов Ю. В.* Основы космической геодезии. — М.: Недра, 1976. 4. *Марченко А. Н.* О некоторых теоретических аспектах представления геопотенциала потенциалом системы точечных масс. — Изв. вуз. Геодезия и аэрофотосъемка, 1982, № 3. 5. *Марченко А. Н.* О стабилизаторах для построения многоточечной модели геопотенциала вариационным методом. — Геодезия, картография и аэрофотоеъемка, 1983, вып. 37. 6. *Марченко А. Н.* О представлении потенциала тяготения Земли рядом фундаментальных решений уравнения Лапласа и его использование для решения основной задачи геодезии. Доклад, представленный на международный симпозиум «Современные методы геодезии и астрономии». — Ленинград, 1982. 7. *Мещеряков Г. А., Марченко А. Н.* О новом подходе к представлению гравитационного потенциала планеты потенциалом системы точечных масс. — Астрономический вестник, 1979, т. XIII, № 4. 8. *Нейман Ю. М.* Вариационный метод физической геодезии. — М.: Недра, 1979. 9. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. 10. *Conte S.* The computation of satellite orbit trajectories, Advances in Computers, Academic Press, 1962. 11. *Krurup T.* A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. Danish Geod. Inst., Publ. No 44, Copenhagen, 1969. 12. *Meschеryakov G. A., Marchenko A. N., Tatevian S. K., Sorokin N. A.* On the use of point mass models of the geopotential for orbit predictions. Adv. Space Res., COSPAR, 1981, vol. 1. 13. *Moritz H.* Advanced Physical Geodesy, 1980, Wichmann. 14. *Rapp R. H.* Special Study Group 5.36. Earth models, Trav. Assoc. int. geod., 1976, v. 25. 15. *Schwarz K. P.* Least squares collocation for large system. Bull. geod. e sci. affini, 1976, v 35, N 3. 16. *Tscherning C. C., Rapp R. H.* Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations and deflections of vertical implied by anomaly degree variance models, 1974, Report No 208, Dept. of Geod. Science, Ohio State Univer.

Статья поступила в редколлегию 20.10.82

УДК 528.33

М. И. МАРЫЧ

О МЕТОДЕ МОЛОДЕНСКОГО РЕШЕНИЯ ЕГО КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

1. Решение интегрального уравнения Молоденского (его методом) для плотности простого слоя и определение возмущающего потенциала T по малому параметру [4] имеют ту особенность, что стоксовы (нулевые) приближения выражаются интегральными формулами, полученными на основе представления об отсут-