УДК 528.21/22

И. Ф. МОНИН, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В статье [1] предложен новый метод вычисления вертикальных производных от смешанных аномалий силы тяжести для точек топографической поверхности Земли и внешнего пространства. Сущность его состоит в определении $\partial\Delta g/\partial Z$ и $\partial^2\Delta g/\partial Z^2$ по формулам:

$$-Z^2\frac{\partial\Delta g}{\partial Z}-2C=\int\frac{\nu}{r_1}\,dS; \tag{1}$$

$$\nu=\cos\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\omega_m; \tag{2}$$

$$\omega_m=\frac{1}{(4\pi)^2}\int(G'_m-G_m)\,S_1\,\psi\,d\sigma+\frac{G_m}{2\pi}; \tag{3}$$

$$G_0=\Delta g-\frac{2C}{\rho_0};\ G_1=-\int\omega_0\,v_1\,d\sigma;\ G_2=-\int(\omega_1 v_1+\omega_0 v_2)\,d\sigma;$$

$$G_3=-\int(\omega_2 v_1+\omega_1 v_2+\omega_0 v_3)\,d\sigma,\cdots;$$

$$v_1=\frac{\cos\psi}{1+t}\cdot\nu_1;\ v_2=\left[t+\frac{t^2+3t}{2(1+t)^2}\cos\psi\right]\nu_1^2;$$

$$v_3=-\frac{6t^2+9t+1}{6(1+t)^3}\cdot\cos\psi\cdot\nu_1^3,\cdots,;$$

$$S_1(\psi)=\sum_0^{\infty}(2n+1)^2(n+2)\,P_n(\cos\psi);$$

$$-Z^3\frac{\partial^2\Delta g}{\partial Z^2}+4C=\int\frac{\delta}{r_1}\,dS; \tag{4}$$

$$\delta=\cos\alpha\sum_0^{\infty}\mu_m; \tag{5}$$

$$\mu_m=\frac{1}{(4\pi)^2}\int(N'_m-N_m)\,S_2(\psi)\,d\sigma+\frac{3N_m}{2\pi}; \tag{6}$$

$$N_0=-\Delta g+\frac{2C}{\rho_0};\ N_1=-\int\mu_0\,\beta_1\,d\sigma;\ N_2=-\int(\mu_1\beta_1+\mu_0\beta_2)\,d\sigma;$$

$$-N_3=-\int(\mu_2\beta_1+\mu_1\beta_2+\mu_0\beta_3)\,d\sigma,\cdots;$$

$$\beta_1 = \frac{4t^2 - 6t^4}{1+t}\cdot\nu_1;\ \beta_2 = \left[3t^3 - t + \frac{2t^2+3t}{(1+t)^2}(2t^2 - 3t^4)\right]\cdot\nu_1^2;$$

$$\beta_3 = -\frac{6t^2+9t+1}{3(1+t)^3}(2t^2-3t^4)\,\nu_1^3, \cdots S_2(\psi) =$$

$$= \sum_0^\infty (2n+1)^2(n+2)(n+3)\,P_n(\cos\psi);$$

где $r_1^2 = Z^2 + \rho^2 - 2Z\rho\cos\psi$; ρ — радиус-вектор текущей точки топографической поверхности S; Z — радиус-вектор фиксированной точки внешнего пространства (если фиксированная точка находится на поверхности S, то $Z = \rho_0$, $r_1 = r$); ψ — угол между Z и ρ; r_1 — расстояние между текущей и фиксированной точками пространства, $C = W_0 - U_0$; W_0 — гравитационный потенциал Земли на поверхности геоида, U_0 — его нормальное значение на поверхности общего земного уровенного эллипсоида (начало координат взято в центре общего земного эллипсоида; Δg — смешанная аномалия силы тяжести; $t = \sin\frac{\psi}{2}$; $\nu_1 = (H' - H)/r_0$, $r_0 = 2at$; H', H — нивелирные высоты текущей и фиксированной точек топографической поверхности S; a — большая полуось двухосного земного эллипсоида; α — угол наклона элементарной площадки dS; $d\sigma$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса; $P_n(\cos\psi)$ — полином Лежандра.

Если в формулах (1) и (4) положить нивелирные высоты $H' = H = 0$, то $\alpha = 0$, $\nu_1 = 0$, $\rho = \rho_0 = a$. В этом случае получим сферическое решение, имеющее наибольшее практическое значение:

$$-Z^2\frac{\partial\Delta g}{\partial Z} - 2C = \int \nu\frac{d\Sigma}{r_1}; \tag{7}$$

$$\nu = \frac{1}{(4\pi)^2}\int(\Delta g' - \Delta g)\,S_1(\psi)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\left(\Delta g - \frac{2C}{a}\right); \tag{8}$$

$$-Z^3\frac{\partial^2\Delta g}{\partial Z^2} + 4C = \int \delta\frac{d\Sigma}{r_1}; \tag{9}$$

$$\delta = \frac{1}{(4\pi)^2}\int(-\Delta g' + \Delta g)\,S_2(\psi)\,d\sigma - \frac{3}{2\pi}\left(\Delta g - \frac{2C}{a}\right), \tag{10}$$

где $d\Sigma$ — элемент поверхности сферы радиуса a; $r_1^2 = Z^2 + a^2 - 2aZ\cos\psi$.

Проверим формулы (7) и (9) на теоретической модели, взятой из статьи [2]. Напомним, что в модели в качестве геоида принят уровенный эллипсоид Красовского. Отсчетной поверхностью является уровенный эллипсоид вращения, у которого большая полуось такая же, а малая на 100 м больше, чем в эллипсоиде Красовского. Центры этих эллипсоидов совпадают. Вращение их происходит вокруг малой оси с одинаковой угловой скоростью.

Как легко показать, данная модель имеет такие характеристики гравитационного поля:

$$\Delta g = g_e \Delta\beta \sin^2\Phi; \tag{11}$$

$$-\frac{\partial \Delta g}{\partial n} = \frac{g_e}{a}\left[-2\,\Delta\alpha + (6\,\Delta\alpha + 2\,\Delta\beta)\sin^2\Phi\right]; \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial n^2} = \frac{g_e}{a}\left[10\,\Delta\alpha - (24\,\Delta\alpha + 4\,\Delta\beta)\sin^2\Phi\right]; \tag{13}$$

$$W_0 - U_0 = C = \frac{2}{3} a g_e \Delta\beta,\ \Delta\alpha = 0{,}0000157;\ \Delta\beta = -0{,}0000158;$$

где Φ — геоцентрическая широта точек отсчетного эллипсоида. Формулы (11)—(13) получены с относительной точностью порядка сжатия земного эллипсоида. В обозначениях $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ все значащие цифры верны.

Подставляя Δg и C модели в формулы (8) и (10), после несложных вычислений получаем:

$$\nu = \frac{g_e \Delta\beta}{4\pi}\left(20\sin^2\Phi - \frac{26}{3}\right); \tag{14}$$

$$\delta = \frac{g_e \Delta\beta}{4\pi}\left(-100\sin^2\Phi + \frac{118}{3}\right). \tag{15}$$

При вычислении интегралов в формулах (8) и (10) мы пользовались известными свойствами сферических функций:

$$\int P_n(\sin\Phi') P_n(\cos\psi)\, d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} P_n(\sin\Phi);$$

$$\int P_n(\sin\Phi') P_m(\cos\psi)\, d\sigma = 0,\ m \neq n;$$

$$\int P_n(\cos\psi)\, d\sigma = 0,\ n \neq 0,$$

где

$$\sin^2\Phi = \frac{2}{3} P_2(\sin\Phi) + \frac{1}{3};\ P_2(\sin\Phi) = \frac{3}{2}\sin^2\Phi - \frac{1}{2}.$$

Далее подставим ν и δ из (14) и (15) в формулы (7) и (9), положив в последних $Z = a$. Выполняя простые преобразования с использованием отмеченных выше свойств сферических функций и соотношения

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}\sum_{0}^{\infty}P_n(\cos\psi), \tag{15'}$$

найдем

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial Z}=\frac{g_e}{a}\Delta\beta\,(2-4\sin^2\Phi), \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial Z^2}=\frac{g_e}{d^2}\Delta\beta\,(-10+20\sin^2\Phi). \tag{17}$$

Сравнивая формулы (16) и (17) с формулами (12) и (13) модели, полученными совершенно другим путем, чем формулы (7) и (9), видим, что в пределах принятой здесь точности они совпадают. Следовательно, формулы (7) и (9) можно применять для вычисления вертикальных производных от аномалий силы тяжести на поверхности геоида и во внешнем пространстве.

Легко видеть, что формулы (1) и (2) более общие, чем (7) и (9). Вычисляемые по ним элементы характеризуют гравитационное поле реальной Земли, а не геоида. Формулы (7) и (9) получены нами из формул (1) и (2). Однако их можно получить независимо, причем точно так же, как и формулы (1) и (2). Эта аналогия является свидетельством достоверности формул (1) и (2), для проверки которых теоретическую модель построить довольно трудно.

В статье [1] даны зависимости между сферическими функциями:

$$\nu_n=(2n+1)(n+2)\frac{G_n}{4\pi}; \tag{18}$$

$$\delta_n=-(2n+1)(n+2)(n+3)\frac{G_n}{4\pi}, \tag{19}$$

где $G=\Delta g-\dfrac{2C}{a}$.

Подставляя соотношение (15′) в формулу (7) при $Z=a$, получаем

$$\int\frac{\nu}{r}\,d\sum=\sum_{0}^{\infty}\int\nu P_n(\cos\psi)\,a\,d\sigma=a\sum_{0}^{\infty}\frac{4\pi}{(2n+1)}\cdot\nu_n=\sum_{0}^{\infty}(n+2)\,aG_n=$$

$$=\sum_{0}^{\infty}(n+2)\frac{(2n+1)}{4\pi}\int(G'-G)\,P_n(\cos\psi)\,a\,d\sigma+2aG.$$

Следовательно,

$$a^2\frac{\partial\Delta g}{\partial Z}=2C-2a\Delta g-\frac{a}{4\pi}\int(\Delta g'-\Delta g)\,S_1(\psi)\,d\sigma. \tag{20}$$

Эта формула совпадает с аналогичной формулой, полученной в статье [3] другим путем. Точно так же из формулы (9) можно получить следующую формулу:

$$a^3 \frac{\partial^2 \Delta g}{\partial Z^2} = -8C + 6a\Delta g + \frac{a}{4\pi} \int (\Delta g' - \Delta g)\, S_2(\psi)\, d\sigma,$$

где

$$S_1(\psi) = \sum_0^\infty (2n+1)(n+2) P_n(\cos\psi), \quad S_2(\psi) =$$

$$= \sum_0^\infty (2n+1)(n+2)(n+3) P_n(\cos\psi),$$

которая приведена в статье [3].

В заключение преобразуем формулы (7) и (9). Воспользовавшись известным разложением

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{a} \sum_0^\infty \left(\frac{a}{Z}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi)$$

и соотношением (18), преобразуем интеграл в формуле (7)

$$\int \nu \frac{d\Sigma}{r_1} = \frac{1}{a} \sum_0^\infty \left(\frac{a}{Z}\right)^{n+1} \int \nu P_n\, d\Sigma = \sum_0^\infty \left(\frac{a}{Z}\right)^{n+1} \frac{4\pi}{2n+1} a\nu_n =$$

$$= a \sum_0^\infty \left(\frac{a}{Z}\right)^{n+1} \frac{4\pi}{2n+1} (2n+1)(n+2) \frac{G_n}{4\pi} = \frac{a}{4\pi} \int G S_1(Z, \psi)\, d\sigma;$$

$$S_1(Z, \psi) = \sum_0^\infty \left(\frac{a}{Z}\right)^{n+1} (2n+1)(n+2) P_n(\cos\psi).$$

После этого формула (7) примет вид

$$-Z^2 \frac{\partial \Delta g}{\partial Z} - 2C = \frac{a}{4\pi} \int \left(\Delta g - \frac{2C}{a}\right) S_1(Z, \psi)\, d\sigma. \qquad (21)$$

Для нахождения суммы $S_1(Z, \psi)$ используем известное разложение

$$\frac{Z^2 - a^2}{r_1^3} = \frac{1}{a} \sum_0 (2n+1) \left(\frac{a}{Z}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi),$$

из которого после умножения его на a/Z и дифференцирования по Z нетрудно получить

$$\frac{a}{r_1^3}\left(1 + \frac{a^2}{Z^2}\right) - \frac{3aZ}{r_1^5}(Z - a\cos\psi)\left(1 - \frac{a^2}{Z^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{a^2} \sum_0^\infty (2n+1)(n+2) \left(\frac{a}{Z}\right)^{n+3} P_n(\cos\psi). \qquad (22)$$

Аналогичным образом преобразуем формулу (9). Не останавливаясь на промежуточных выкладках, окончательно запишем:

$$-Z^3 \frac{\partial^2 \Delta g}{\partial Z^2} + 4C = -\frac{a}{4\pi} \int \left(\Delta g - \frac{2C}{a} \right) S_2(Z, \psi)\, d\sigma; \qquad (23)$$

$$S_2(Z, \psi) = \sum_0^\infty \left(\frac{a}{Z} \right)^{n+1} (2n+1)(n+2)(n+3) P_n(\cos\psi).$$

Сумму S_2 можно найти, дифференцируя по Z выражение (22).

Список литературы: 1. *Монін І. Ф.* Новий метод обчислення вертикальних похідних земного прискорення. — ДАН УРСР, 1967, № 12, серія Б. 2. *Монін І. Ф.* До обгрунтування одного методу визначення фігури Землі. — ДАН УРСР, 1973, № 3, серія Б. 3. *Монін І. Ф.* Про розклад гравітаційного потенціалу Землі в ряд Тейлора. — ДАН УРСР. Серія Б, 1967, № 9.

Работа поступила 7 апреля 1978 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.