

При реализации на практике полученного алгоритма (19) необходимо учесть также следующие условия, связывающие коэффициенты m_i^* : сумма их величин должна равняться нулю, а центр масс создаваемой многоточечной модели целесообразно совместить с центром масс Земли. В отдельных случаях имеет смысл учитывать также (кроме гармоник нулевого и первого порядков) и те гармонические коэффициенты геопотенциала, которые уже достаточно надежно определены к настоящему времени и считаются фундаментальными геодезическими постоянными. Поэтому в общем случае будем полагать, что нам задано t условных уравнений ($t < N$)

$$GM = W, \quad (21)$$

где элементы матрицы $G = [g_{ij}]_{t,N}$ размерностью $(t \times N)$ представлены в виде

$$g_{ij} = \frac{1}{fM} \left(\frac{d_i}{a} \right)^n \frac{\bar{P}_n^m(\cos \vartheta_i)}{2n+1} \begin{cases} \cos m\lambda_i, \\ \sin m\lambda_i, \end{cases} \quad (22)$$

а элементы вектора $W(t \times 1)$ — суть те нормированные гармонические коэффициенты $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ геопотенциала, с которыми требуется на основании (21), (22) согласовать величины m_i^* . В (22) $d_i, \vartheta_i, \lambda_i$ — полярные координаты i -ой точечной массы; a — большая полуось общеземного эллипсоида; $\bar{P}_n^m(\cos \vartheta_i)$ — нормированная присоединенная функция Лежандра; fM — произведение гравитационной постоянной на массу планеты; индекс j выражает порядковые номера учитываемых гармоник $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$.

Составим теперь вспомогательную функцию (Лагранжа) в следующей форме:

$$\Phi_\alpha = v^T C_{nn}^{-1} v + \alpha M^T F M + 2K^T (GM - W), \quad (23)$$

где K — вектор $(t \times 1)$ неопределенных множителей Лагранжа (коррелат). Тогда Φ_α (после дифференцирования и необходимых преобразований) имеет относительный минимум при

$$\left. \begin{aligned} X &= [N_{11} + N_{12}(QG^T R GQ - Q)N_{21}]^{-1} \cdot \{U_1 - \\ &\quad - N_{12}[QG^T R W - (QG^T R GQ - Q)U_2]\}; \\ M &= Q[G^T R(W - GQ(U_2 - N_{21}X)) + U_2 - N_{21}X], \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q &= (N_{22} + \alpha F)^{-1}; \\ R &= [G(N_{22} + \alpha F)^{-1}G^T]^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

а параметр регуляризации α , входящий в (25), (24), можно найти с помощью соотношения (17).

При изучении же гравитационного потенциала в глобальном масштабе, что соответствует главным образом спутниковым наблюдениям, имеется возможность [8] положить значение $\alpha = 1$ в том случае, если асимптотика выбранного воспроизводящего

ядра, определяющего вид матрицы F [5, 6], близка или совпадает со спектром степенных дисперсий возмущающего потенциала T . Последнее, в частности, приводит к выбору воспроизводящего ядра С. Чернинга—Р. Раппа [16] и полученных в [6] соответствующих замкнутых выражений для вычисления элементов матрицы F . При $\alpha = 1$ с помощью алгоритма (24) сравнительно просто можно получать устойчивое решение задачи отыскания координат станций и выбранных параметров геопотенциала m_i^* по результатам спутниковых наблюдений.

Список литературы: 1. Алексидзе М. А. Об одном представлении аномального гравитационного поля. — ДАН СССР, 1966, т. 170, № 4. 2. Алексидзе М. А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. — М.: Наука, 1978. 3. Краснорылов И. И., Плахов Ю. В. Основы космической геодезии. — М.: Недра, 1976. 4. Марченко А. Н. О некоторых теоретических аспектах представления геопотенциала потенциалом системы точечных масс. — Изв. вуз. Геодезия и аэрофотоустановка, 1982, № 3. 5. Марченко А. Н. О стабилизаторах для построения многоточечной модели геопотенциала вариационным методом. — Геодезия, картография и аэрофотоустановка, 1983, вып. 37. 6. Марченко А. Н. О представлении потенциала тяготения Земли рядом фундаментальных решений уравнения Лапласа и его использование для решения основной задачи геодезии. Доклад, представленный на международный симпозиум «Современные методы геодезии и астрономии». — Ленинград, 1982. 7. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. О новом подходе к представлению гравитационного потенциала планеты потенциалом системы точечных масс. — Астрономический вестник, 1979, т. XIII, № 4. 8. Нейман Ю. М. Вариационный метод физической геодезии. — М.: Недра, 1979. 9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. 10. Conte S. The computation of satellite orbit trajectories, *Advances in Computers*, Academic Press, 1962. 11. Krurup T. A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. *Danish Geod. Inst., Publ. No 44*, Copenhagen, 1969. 12. Mescheryakov G. A., Marchenko A. N., Tatevian S. K., Sorokin N. A. On the use of point mass models of the geopotential for orbit predictions. *Adv. Space Res., COSPAR*, 1981, vol. 1. 13. Moritz H. *Advanced Physical Geodesy*, 1980, Wichmann. 14. Rapp R. H. Special Study Group 5.36. Earth models. *Trav. Assoc. int. geod.*, 1976, v. 25. 15. Schwarz K. P. Least squares collocation for large system. *Bull. geod. e sci. affini*, 1976, v. 35, N 3. 16. Tscherning C. C., Rapp R. H. Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations and deflections of vertical implied by anomaly degree variance models, 1974, Report No 208, Dept. of Geod. Science, Ohio State Univer.

Статья поступила в редколлегию 20.10.82

УДК 528.33

М. И. МАРЫЧ

О МЕТОДЕ МОЛОДЕНСКОГО РЕШЕНИЯ ЕГО КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

1. Решение интегрального уравнения Молоденского (его методом) для плотности простого слоя и определение возмущающего потенциала T по малому параметру [4] имеют ту особенность, что стоковые (нулевые) приближения выражаются интегральными формулами, полученными на основе представления об отсут-

ствии сферической функции первого порядка в аномалиях силы тяжести

$$\Delta g = -\left(\frac{\partial T}{\partial r'} + \frac{2T}{r'}\right)_{r'=R}, \quad (1)$$

заданных на краевой поверхности (физической поверхности Земли) s .

Эта функция обусловлена рельефом и равна нулю в аномалии на внешней земной сфере, представляющей собой первый член разложения Δg в ряд Тейлора по степеням высот $H = r - R$, отсчитываемых от этой сферы.

Так как выбор отсчетной сферы не может повлиять на решение задачи, то следующие приближения Молоденского, учитывающие рельеф, должны приводить к результату, получаемому и при предположении формального аналитического продолжения аномалии Δg на сферу, расположенную внутри притягивающих масс. Таким образом, сферическая функция первого порядка не нарушает строгости решения задачи по малому параметру в общем случае, а свидетельствует лишь о правомерности данного предположения, что обеспечивается математическими основами метода.

Изложенное соответствует аналитическим преобразованиям формул Молоденского для потенциала T на физической поверх-

ности Земли, полученных с точностью порядка $\frac{H}{R}$ [5], и вполне

согласуется с независимостью решения задачи от краевой поверхности, хорошо проявляющейся при разложении интеграла Стокса в ряд по шаровым функциям, в результате которого радиус внешней сферы, входящий в ядро и в обкладку интеграла, исключается и вместо него может быть принят радиус внутренней сферы.

Аналогичен и на этом же принципе основан вывод ряда Молоденского

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r', \theta, \lambda) k^n, \quad (2)$$

выражающего при $k=1$ возмущающий потенциал $T = T(r', \theta, \lambda)$ во всем внешнем пространстве Земли, указанный в работе [2]. Здесь только аномалии на сфере, записанные в виде ряда Тейлора по степеням H , и обобщенная функция Стокса рассматриваются как функции от параметра k ($0 \leq k \leq 1$), являющегося множителем при H , разлагаются в ряды не по сферическим функциям, а по степеням k .

2. Получим методом Молоденского первое приближение решения его краевой задачи с учетом всех величин порядка $\frac{H}{R}$ в виде названного разложения интеграла Стокса. Для этого воспользуемся несколько преобразованным выражением потенциала простого слоя

$$\bar{T} = R^2 \int \frac{\bar{\chi}}{r'} d\omega \quad (3)$$

и интегральным уравнением

$$2\pi \bar{\chi} \cos^2 \alpha = \frac{\bar{\rho}}{R^2} \Delta g + \bar{\rho} \int \frac{\bar{\chi}}{r} d\omega + \frac{\bar{\rho}}{2} \int \bar{\chi} \frac{\rho^{-2} - \rho_0^{-2}}{r^3} d\omega \quad (4)$$

для вспомогательной плотности слоя $\chi = \chi(\rho, \theta, \lambda)$ [4]. Здесь приняты такие обозначения: $d\omega$ — элемент сферы единичного радиуса, r' — расстояние от данной точки $P(\rho', \theta, \lambda)$ внешнего пространства до текущей точки на поверхности s , r — значение r' при $\rho' = \rho_0$, где ρ_0 — значение радиуса-вектора ρ в данной точке и α — угол наклона поверхности s . Надстрочные черточки указывают на зависимость элементов от параметра k , введенного по формуле $\bar{\rho} = R + kH$ ($\bar{\rho}_0 = R + kH_0$), вследствие чего радиус-вектор точки P принимает значения $\bar{\rho}' = R + kH_0 + z$, где z — высота точки над поверхностью s , независимая от k (3).

Уравнение (4) после разложения обеих его частей в ряды по степеням k и приравнивания множителей при k в одинаковой степени приводит к интегральному уравнению

$$2\pi \chi_n - \frac{3}{4} \int \chi_n \frac{d\omega}{r_1} = G_n.$$

Его можно решить исходя из предположения, что отсутствует сферическая функция первого порядка в свободных членах G_n , где

$$r_1 = 2 \sin \frac{\psi}{2}, \quad G_0 = \Delta g,$$

$$G_1 = \frac{1}{R} \int \chi_0 \frac{H - H_0}{r_1^3} d\omega - \frac{3}{4R} \int \chi_0 \frac{H - H_0}{r_1} d\omega + \frac{2H}{R} \Delta g \quad (5)$$

и т. д. Они последовательно определяют коэффициенты

$$\chi_n = \frac{G_n}{2\pi} + \frac{3}{(4\pi)^2} \int G_n [S(\psi) - 1] d\omega \quad (6)$$

степенного ряда

$$\bar{\chi} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(\rho, \theta, \lambda) k^n, \quad (7)$$

выражающего плотность χ при $k=1$ [4].

С целью дополнительного раскрытия смысла малого параметра, предложенного Молоденским, отметим следующее. При введении параметра k ($0 \leq k \leq 1$) аномалии Δg остаются без изменений, что позволяет решения краевой задачи $T = T(\rho', \theta, \lambda)$ в каждой точке внешнего пространства и интегрального уравнения $\chi = \chi(\rho, \theta, \lambda)$ в любой точке поверхности s рассматривать как функции от k , точно удовлетворяющие граничному условию (1) и урав-

нению (4) лишь при $k=1$, и искать их в виде степенных рядов (2) и (7), сходящихся в как угодно малой окрестности точки $k=0$. Формулы для коэффициентов T_n так же, как и интегральные уравнения для χ_n , получают в результате приравнивания множителей при k в одинаковой степени в выражениях (3) и (4) на основании теоремы о единственности степенного ряда, согласно которой два ряда по степеням k тождественны, если они в указанной окрестности имеют равные суммы.

При разложении элемента $\bar{r}'^{-1}$ формулы (3) по степеням k воспользуемся соотношением $\bar{r}'^2 = \bar{\rho}^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\psi$. После некоторых его преобразований, связанных с получением суммы первых двух членов разложения, и принимая во внимание ряды (2) и (7), находим

$$T_0 = R^2 \int \chi_0 \frac{d\omega}{r'_0} \quad (8)$$

и

$$T_1 = R^2 \int \chi_1 \frac{d\omega}{r'_0} + \frac{R^2}{2} (\rho_0'^2 - R^2) \int \chi_0 \left(\frac{H}{R} - \frac{H_0}{\rho_0'} \right) \frac{d\omega}{r_0'^3} - \frac{R^2}{2} \int \chi_0 \left(\frac{H}{R} + \frac{H_0}{\rho_0'} \right) \frac{d\omega}{r_0'^3}, \quad (9)$$

где $\rho_0' = R + z$ и $r_0' = \sqrt{R^2 + \rho_0'^2 - 2R\rho_0'\cos\psi}$.

Нулевое приближение χ_0 (6) можно рассматривать как решение (7) интегрального уравнения (4) при $k=0$, являющегося приближенным ($k \neq 1$). Эта приближенность выражается упомянутой выше сферической функцией первого порядка и последовательно исключается в результате введения поправок χ_1, χ_2 и т. д. (6). Вследствие этого и в нулевом приближении T_0 (8) потенциала появляется соответствующая сферическая функция первого порядка, которая также исключается поправками T_1, T_2 и т. д. Таким образом, дальнейшие преобразования формул (8) и (9) можно выполнять без учета в них названной сферической функции.

Подставляя решение (6) при $n=0$ в выражение (8) и принимая во внимание разложения по полиномам Лежандра обобщенной функции Стокса $S(\rho', \psi)$ и $\bar{r}'^{-1}$ при $k=0$, а именно:

$$S(\rho_0', \psi) = \frac{2}{r_0'} + \frac{1}{\rho_0'} - \frac{3r_0'}{r_0'^2} - \frac{5R\cos\psi}{\rho_0'^2} - \frac{3R}{\rho_0'^2} \cos\psi \ln \frac{r_0' + \rho_0' - R\cos\psi}{2\rho_0'} = \frac{1}{R} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho_0'} \right)^{m+1} \frac{2m+1}{m-1} P_m(\cos\psi) \quad (10)$$

и

$$\frac{1}{r_0'} = \frac{1}{\rho_0'} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho_0'} \right)^m P_m(\cos\psi) \quad (11)$$

приводим нулевое приближение потенциала к виду обобщенной формулы Стокса

$$T_0(\rho', \Theta, \lambda) = \frac{R^2}{4\pi} \int \Delta g \left[S(\rho_0', \psi) - \frac{1}{\rho_0'} \right] d\omega. \quad (12)$$

К такому же виду приводится и первое слагаемое поправки Молоденского (9), записанной так же, как и функция (5) с учетом всех ее членов.

$$R^2 \int \chi_1 \frac{d\omega}{r'_0} = \frac{R^2}{4\pi} \int G_1 \left[S(\rho_0', \psi) - \frac{1}{\rho_0'} \right] d\omega. \quad (13)$$

Выполним некоторые преобразования данной поправки. Для этого первый член правой части (5) запишем в виде

$$\frac{1}{R} \int \chi_0 \frac{H - H_0}{r_1^3} d\omega = -\frac{H}{R} \int \frac{\chi_0 - \chi_0^{(0)}}{r_1^3} d\omega + \frac{1}{R} \int \frac{H\chi_0 - H_0\chi_0^{(0)}}{r_1^3} d\omega,$$

где $\chi_0^{(0)}$ — значение χ_0 в данной точке. С помощью формулы (6) при $n=0$, разложений по сферическим функциям и соотношения [1]

$$\frac{1}{2\pi} \int (t - t_0) \frac{d\omega}{r_1^3} = - \sum_{m=1}^{\infty} m [t]_m,$$

где $[t]_m$ — сферическая функция m -го порядка в t , приводим функцию (5) к виду

$$G_1 = - \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \right)_0 H - \frac{4\pi}{R} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m(m-1)}{2m+1} [H\chi_0]_m. \quad (14)$$

Здесь $[H\chi_0]_m$ — сферическая функция m -го порядка в произведении $H\chi_0$ и

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \right)_0 = \frac{1}{2\pi R} \int \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r_1^3} d\omega - \frac{2\Delta g}{R} = - \frac{1}{R} \sum_{m=2}^{\infty} (m+2) [\Delta g]_m \quad (15)$$

есть нулевое приближение первой радиальной производной аномалии Δg [3]. Выражение (13) с учетом соотношения (14) приводят к результату

$$R^2 \int \chi_1 \frac{d\omega}{r'_0} = - \frac{R^2}{4\pi} \int \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \right)_0 H \left[S(\rho_0', \psi) - \frac{1}{\rho_0'} \right] d\omega - 4\pi \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho_0'} \right)^{m+1} \frac{m}{2m+1} [H\chi_0]_m.$$

Дифференцируя обе части формулы (11) по ρ_0' , получаем равенство

$$\frac{\rho_0'^2 - R^2}{2\rho_0' r_0'^3} + \frac{1}{2\rho_0' r_0'} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \frac{R^m}{\rho_0'^{m+2}} P_m(\cos\psi),$$

позволяющее без особых затруднений привести второе слагаемое (9) к виду

$$\frac{R^2}{2} (r_0 - R^2) \int \chi_0 \left(\frac{H}{R} - \frac{H_0}{\rho'_0} \right) \frac{d\omega}{r_0^3} = 2\pi \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho'_0} \right)^{m+1} ([H\chi_0]_m - \frac{RH}{\rho'_0} [\chi_0]_m) +$$

$$+ 2\pi \frac{R}{\rho'_0} ([H\chi_0]_0 + \frac{RH}{\rho'_0} [\chi_0]_0).$$

Разложение третьего слагаемого (9) можно записать так:

$$-\frac{R^2}{2} \int \chi_0 \left(\frac{H}{R} + \frac{H_0}{\rho'_0} \right) \frac{d\omega}{r_0^3} = -2\pi \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho'_0} \right)^{m+1} \frac{1}{2m+1} ([H\chi_0]_m +$$

$$+ \frac{RH}{\rho'_0} [\chi_0]_m) - 2\pi \frac{R}{\rho'_0} ([H\chi_0]_0 + \frac{RH}{\rho'_0} [\chi_0]_0).$$

Суммируя полученные результаты, имеем

$$T_1 = -\frac{R^3}{4\pi} \int \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \right)_0 H \left[S(\rho'_0, \psi) - \frac{1}{\rho'_0} \right] d\omega -$$

$$-\frac{4\pi RH}{\rho'_0} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho'_0} \right)^{m+1} \frac{m+1}{2m+1} [\chi_0]_m - \frac{4\pi R^2 H}{\rho'^2_0} [\chi_0]_0. \quad (16)$$

Принимая во внимание соотношения (10), (12), (15),

$$[\chi_0]_m = \frac{[\Delta g]_m}{4\pi} \frac{2m+1}{m-1}$$

($m \neq 1$), свойство ортогональности и теорему восстановления сферических функций, находим

$$-\frac{4\pi RH}{\rho'_0} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho'_0} \right)^{m+1} \frac{m+1}{2m+1} [\chi_0]_m = \frac{R^2 H}{4\pi \rho'_0} \int \left[\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \right)_0 R + \Delta g \right] S(\rho'_0, \psi) d\omega$$

и

$$-4\pi \left(\frac{R}{\rho'_0} \right)^2 H [\chi_0]_0 = \frac{H}{4\pi} \left(\frac{R}{\rho'_0} \right)^2 \int \Delta g d\omega.$$

С учетом этих равенств и разложения (15) можно формулу (16) записать так:

$$T_1 = -\frac{R^2}{4\pi} \int \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \right)_0 \left(H - \frac{R}{\rho'_0} H_0 \right) \left[S(\rho'_0, \psi) - \frac{1}{\rho'_0} \right] d\omega + T_0 \frac{H}{\rho'_0} \quad (17)$$

или, после некоторых преобразований, в виде

$$T_1 = -\frac{R_2}{4\pi} \int \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho} \right)_0 H \left[S(\rho'_0, \psi) - \frac{1}{\rho'_0} \right] d\omega + \frac{\partial T_0}{\partial \rho'_0} H, \quad (18)$$

где

$$\frac{\partial T_0}{\partial \rho'_0} = \frac{R^2}{4\pi} \int \Delta g \frac{\partial \left[S(\rho'_0, \psi) - \frac{1}{\rho'_0} \right]}{\partial \rho'_0} d\omega$$

есть нулевое приближение первой радиальной производной потенциала T , относящееся к исследуемой точке P .

Итак, формулы (12) и (17) или (12) и (18) определяют первое приближение Молоденского $T_0 + T_1$ возмущающего потенциала во всем внешнем пространстве Земли. Так как

$$\frac{\partial S(\rho'_0, \psi)}{\partial \rho'_0} H = \frac{\partial S(\bar{\rho}', \psi)}{\partial \rho'} \frac{d\bar{\rho}'}{dk} \Big|_{k=0} = \frac{\partial S(\bar{\rho}', \psi)}{\partial k} \Big|_{k=0},$$

то легко убедиться, что оно представляет собой сумму двух первых членов упомянутого выше разложения интеграла Стокса по степеням параметра k .

3. Из изложенного видно, что этот метод решения краевой задачи Молоденского с помощью интегрального уравнения для плотности простого слоя так же, как и решение задачи, получаемое по малому параметру k исходя из разложения аномалии силы тяжести в ряд Тейлора по степеням H [2], основаны на теореме о единственности степенного ряда и соответствует теории суммирования расходящихся рядов, согласно которой ряды можно рассматривать как аналитические выражения функций их производящих, и при решении той или иной задачи ими можно пользоваться формально, не считаясь с их областью сходимости. Практическую эффективность использования ряда Молоденского в качестве приближенной формулы для возмущающего потенциала, в частности, подтверждают исследования на моделях Земли [4], а также вычисления потенциала топографических масс в приближениях Молоденского [2].

Следует отметить, что полученные по степеням k интегральные формулы (12) и (17) определяют приближения потенциала T_0 и $T_0 + T_1$ во всем внешнем пространстве Земли при любой отсчетной сфере, расположенной внутри или вне краевой поверхности S , и не позволяют его вычисления внутри S . Таким образом, они не допускают трактовки метода аналитического продолжения возмущающего потенциала во внутрь притягивающих масс.

Список литературы: 1. Еремеев В. Ф., Юркина М. И. К вопросу о решении одного интегрального уравнения типа Фредгольма первого рода в связи с теорией фигуры Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1970, вып. 11. 2. Марыч М. И. Вычисление потенциала топографических масс в приближениях Молоденского. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1979, вып. 6. 3. Марыч М. И. О решении задачи Молоденского с помощью ряда Тейлора. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1973, вып. 17. 4. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр. ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131. 5. Пеллине Л. П. О тождественности различных решений задачи Молоденского. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1974, вып. 3.

Статья поступила в редколлегию 11.05.82