

В. В. НИКИФОРОВ

Львовский политехнический институт

О ТОЧНОСТИ УРАВНЕННЫХ УГЛОВ В РЯДАХ ТРИАНГУЛЯЦИИ

В некоторых случаях в геодезической практике возникает необходимость предварительно оценивать точность уравненных углов в рядах триангуляции. Как известно, среднюю квадратическую ошибку функции определяют по формуле

$$m_F = \pm \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}, \quad (1)$$

где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса; $1/P_F$ — обратный вес функции, который находят из выражения

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cf \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \dots \quad (2)$$

Таким образом, если значение μ известно, то задача сводится к определению обратного веса $1/P_F$. При этом весовую функцию любого уравненного угла можно записать в виде

$$dF_i = (i). \quad (3)$$

1. **Ряд из равносторонних треугольников** (рис. 1). При уравнении такого ряда только за условия фигур вида $(3i-2) +$

$+(3i-1)+(3i)+w_i=0$, где i — номер треугольника, условные уравнения не имеют общих поправок и обратные веса углов будут равны между собой

$$\frac{1}{P_{F_i}} = \frac{2}{3}. \quad (4)$$

Если данный ряд дополнительно уравнивать за условия дирекционных углов и базисов вида

$$\sum_{i=1}^n (3i) (-1)^i + w_a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \{\delta_{3i-2} (3i-2) - \delta_{3i-1} (3i-1)\} + w_b = 0,$$

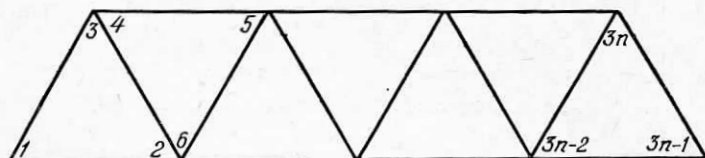


Рис. 1. Ряд из равносторонних треугольников.

то при уравнивании по методу двух групп в первую группу войдут n условных уравнений фигур, а во вторую — уравнения условия дирекционных углов, базисное и весовые функции. Запишем коэффициенты нормальных уравнений второй группы:

$$[AA] = 2n; \quad [BB] = 2,9768 n; \quad [AB] = 0; \quad [FF] = \frac{2}{3};$$

$$[AF_{3i-2}] = [AF_{3i-1}] = \frac{1}{3}; \quad [AF_{3i}] = -\frac{2}{3};$$

$$[BF_{3i-2}] = 1,22; \quad [BF_{3i-1}] = -1,22; \quad [BF_{3i}] = 0.$$

На основании решения системы нормальных уравнений получим

$$\frac{1}{P_{F_i}} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad (5)$$

Здесь n — число треугольников в ряду.

2. Ряд из геодезических квадратов (рис. 2). Если ряд уравнивают за условия фигур и полюсов по методу двух групп, то в первую группу войдут $2n$ условий фигур вида:

$$(8i-7) + (8i-6) + (8i-5) + (8i-4) + w_{1i} = 0;$$

$$(8i-3) + (8i-2) + (8i-1) + (8i) + w_{2i} = 0,$$

во вторую — n условий фигур $(8i-5) + (8i-4) + (8i-3) + (8i-2) + w_{3i} = 0$ и n полюсных условий

$$\delta(8i-7) - \delta(8i-6) + \delta(8i-5) - \delta(8i-4) + \delta(8i-3) - \\ - \delta(8i-2) + \delta(8i-1) - \delta(8i) + w_{4i} = 0.$$

Коэффициенты нормальных уравнений, соответствующие данной системе условных уравнений, приведены в табл. 1.

На основании решения системы нормальных уравнений при уравнивании за условия фигур и полюсов (табл. 1) получим

$$\frac{1}{P_{Fi}} = 0,5. \quad (6)$$

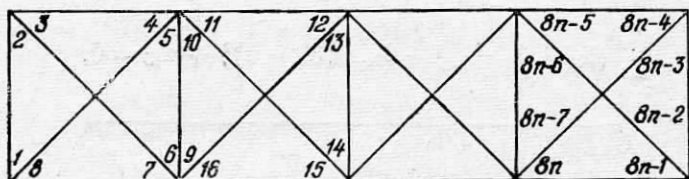


Рис. 2. Ряд из геодезических квадратов.

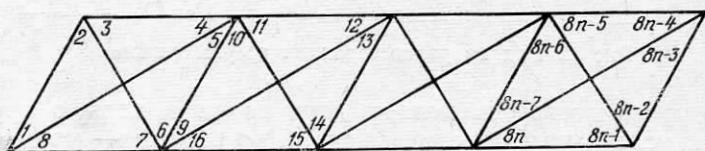


Рис. 3. Ряд из геодезических ромбов.

Если этот ряд дополнительно уравнивать за условия дирекционных углов и базисов вида

$$\sum_{i=1}^n \{ (8i-2) - (8i-6) \} + w_a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \{ \delta_{8i}(8i) - \delta_{8i-4}(8i-4) \} + w_b = 0,$$

то во вторую группу войдут дополнительно уравнения условия дирекционных углов и базисное. Коэффициенты нормальных уравнений, соответствующие данной системе условных уравнений, приведены в табл. 2.

На основании решения системы нормальных уравнений получим

$$\frac{1}{P_{Fi}} = 0,5 - \frac{1}{4n}. \quad (7)$$

3. Ряд из геодезических ромбов (рис. 3). При уравнивании ряда только за условия фигур и полюсов по аналогии с рядом из геодезических квадратов получим для углов в 30° и 60° :

Коэффициенты нормальных уравнений

Таблица 1

	A_1	A_2	...	B_1	B_2	...	F_1	F_2	F_7	F_8	F_3	F_4	F_8	F_6	...
A_1	2	0	...	0	0	...	0,5	0,5	-0,5	-0,5	+0,5	+0,5	-0,5	-0,5	...
A_2		2	...	0	0	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
B_1			...	35,28	...	...	-2,1	+2,1	-2,1	+2,1	-2,1	+2,1	-2,1	+2,1	...
B_2			...	...	35,28	...	0	0	0	0	0	0	0	0	...
F						...	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	...

Таблица 2

Коэффициенты нормальных уравнений

	A_1	A_2	...	B_1	B_2	...	C	D	F_1	F_2	F_7	F_8	F_3	F_4	F_8	F_6	...
A_1	2	0	...	0	0	...	-2,0	-1,0	+0,5	+0,5	-0,5	+0,5	+0,5	+0,5	+0,5	-0,5	...
A_2		2	...	0	0	...	-2,0	-1,0	...	...	...	...	...	...	...	...	...
B_1			...	35,28	...	...	0	0	-2,1	+2,1	-2,1	+2,1	-2,1	+2,1	+2,1	+2,1	...
B_2			...	...	35,28	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
C						6,615	...	1,05	-0,5	-0,5	-0,5	1,5	0,5	1,5	0,5	0,5	...
D						...	1,50	...	0,25	-0,75	0,25	0,25	0,25	-0,25	-0,25	+0,5	...
F								0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	...

$$\frac{1}{P_{F_{30^\circ}}} = 0,4; \quad \frac{1}{P_{F_{60^\circ}}} = 0,6. \quad (8)$$

Если же ряд дополнительно уравнивать за условия дирекционных углов и базисов, то

$$\frac{1}{P_{F_{30^\circ}}} = 0,4 - \frac{1}{4n}; \quad \frac{1}{P_{F_{60^\circ}}} = 0,6 - \frac{1}{4n}. \quad (9)$$

Анализируя полученные формулы, видим, что влияние условий дирекционных углов и базисов на обратный вес уравненного угла зависит не от формы ряда, а только от числа фигур в нем.

Поставленную задачу можно также решить приближенно на основании теоремы о среднем отношении весов p — измеренных и P — уравненных элементов

$$\frac{p}{P} = \frac{n-r}{n} = \frac{\text{число необходимых измерений}}{\text{число всех измерений}}. \quad (10)$$

При этом получим следующие формулы:

1. Для уравненных углов ряда из равносторонних треугольников:

а) за условия фигур

$$\frac{p}{P} = \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}; \quad (4')$$

б) за условия фигур, дирекционных углов и базисов

$$\frac{p}{P} = \frac{2n}{3n+2} \approx \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3n}\right). \quad (5')$$

2. Для уравненных углов ряда из геодезических четырехугольников:

а) за условия фигур и полюсов

$$\frac{p}{P} = \frac{4n}{8n} = 0,50; \quad (6')$$

б) за условия фигур, полюсов, дирекционных углов и базисов

$$\frac{p}{P} = \frac{4n}{8n+2} \approx 0,50 \left(1 - \frac{1}{4n}\right). \quad (7')$$

При $n > 10$ строгие и приближенные формулы дают расхождение 3%—10%. Однако при $n < 10$, что наблюдается в прикладной геодезии, расхождения довольно значительные и достигают при $n=3$ для ряда из треугольников 15%, для ряда из квадратов 10% и для ряда из ромбов 30%.

В «Инструкции о построении государственной геодезической сети СССР» [2] и «Справочнике геодезиста» [3] приведены

коэффициенты, на которые надо умножать обратный вес удаленной стороны ряда: для треугольников — $4/3$, для геодезических четырехугольников и центральных систем — $1,1$ (для оценки по ошибкам углов эти коэффициенты должны быть уменьшены в два раза). Они получены Ф. Н. Красовским и В. В. Даниловым в 1938 г. [1] и являются приближенными.

В настоящей работе получены более точные их значения, которые можно использовать при проектировании сетей.

Выражаю благодарность студенту Львовского политехнического института М. Ф. Дулину, выполнившему исследования полученных формул на теоретических моделях.

Список литературы: 1. Красовский Ф. Н., Данилов В. В. Руководство по высшей геодезии, ч. 1, вып. 1. М., Изд-во редбюро ГУГСК НКВД СССР, 1938. 2. Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР. М., Недра, 1966. 3. Справочник геодезиста, ч. 1. М., Недра, 1975.

Работа поступила 24 апреля 1978 года.
Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.