УДК 528.14:528.35

Б. П. КВАСНЮК

ВИДОИЗМЕНЕННЫЕ ТИПОВЫЕ УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТОРОН В ТРИЛАТЕРАЦИИ

Правила образования формул поправок координат [2] и типовые условные уравнения сторон и дирекционных углов [1] применяют в тех случаях, когда заданные дирекционные углы сторон, расположенных между определяемыми пунктами, не

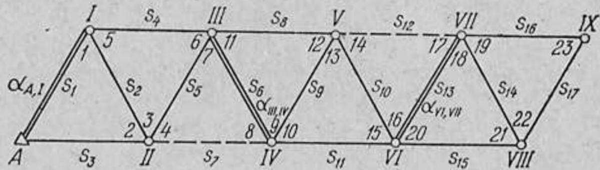

Рис. 1. Цепь треугольников с твердыми дирекционными углами $\alpha_{A,I}$, $\alpha_{III,IV}$ и $\alpha_{VI,VII}$.

участвуют в вычислении приближенных координат, то есть являются избыточными. Если же эти дирекционные углы использовать как необходимые, то, очевидно, изменят свой вид и формулы поправок координат и условные уравнения.

В работе [1] показано, что для составления типовых условных уравнений в любой сети трилатерации достаточно изучить закономерности их составления в цепях треугольников. Рассмотрим цепи треугольников, в которых заданы дирекционные углы связующих сторон. Пусть в цепи треугольников (рис. 1) координаты пунктов *I, II, III* вычисляют по дирекционному углу α_{AI} и сторонам s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, пунктов *IV, V, VI* — по α_{III-IV} и s_6, s_8, s_9, s_{10}, s_{11} и пунктов *VII, VIII, IX* — по α_{VI-VII} и s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}, s_{17}. Стороны s_7 и s_{12} избыточные.

Поправки координат пунктов *I, II, III* определяют по формулам (1), (2); (4), (5), приведенным в работе [2].

Если приближенные координаты пункта k находят от определяемого i по стороне s_j, соединяющей i и k, и дирекционному углу α_{ik}, то формулы δx_k и δy_k, очевидно, получим из совместного решения уравнений поправок стороны s_j и дирекционного угла α_{ik}.

Они имеют вид:

$$\delta x_k = \cos \alpha_{ik} v_j + \delta x_i; \quad \delta y_k = \sin \alpha_{ik} v_j + \delta y_i. \qquad (1)$$

Значит, для поправок координат пунктов *IV* и *VII*

$$\delta x_{IV} = \cos \alpha_{III,IV} v_6 + \delta x_{III}; \quad \delta y_{IV} = \sin \alpha_{III,IV} v_6 + \delta y_{III};$$

$$\delta x_{VII} = \cos \alpha_{VI,VII} v_{13} + \delta x_{VI}; \quad \delta y_{VII} = \sin \alpha_{VI,VII} v_{13} + \delta y_{VI}. \qquad (2)$$

Формулы поправок координат пунктов *V, VI, VIII, IX* найдем, решая попарно уравнения поправок сторон s_8 и s_9, s_{10} и s_{11}, s_{14} и s_{15}, s_{16} и s_{17} с учетом (2). Приводим лишь формулы δx_{VI}, δy_{VI}, δx_{IX}, δy_{IX}:

$$\delta x_{VI} = a_{11} v_{11} - a_{10} v_{10} + a_9 v_9 - a_8 v_8 - [a_9 \cos 9 + a_{11} \cos (9+10)] v_6 + \\ + \delta x_{III}; \quad \delta y_{VI} = -b_{11} v_{11} + b_{10} v_{10} - b_9 v_9 + b_8 v_8 + [b_9 \cos 9 + \\ + b_{11} \cos (9+10)] v_6 + \delta y_{III}, \qquad (3)$$

где
$$a_{11} = \frac{\sin \alpha_{V,VI}}{\sin 15}, \quad a_{10} = \frac{\sin \alpha_{IV,VI}}{\sin 15}; \quad a_9 = T_{9-10} a_{10},$$

$$a_8 = T_{8-10} a_{10}; \quad b_{11} = \frac{\cos \alpha_{V,VI}}{\sin 15}, \quad b_{10} = \frac{\cos \alpha_{IV,VI}}{\sin 15};$$

$$b_9 = T_{9-10} b_{10}, \quad b_8 = T_{8-10} b_{10}; \qquad (4)$$

$$\delta x_{IX} = c_{17} v_{17} - c_{16} v_{16} + c_{15} v_{15} - c_{14} v_{14} + [c_{14} \cos 18 + \\ + c_{16} \cos (18+19)] v_{13} + \delta x_{VI};$$

$$\delta y_{IX} = -d_{17} v_{17} + d_{16} v_{16} - d_{15} v_{15} + d_{14} v_{14} - [d_{14} \cos 18 + \\ + d_{16} \cos (18+19)] v_{13} + \delta y_{VI}. \qquad (5)$$

Здесь
$$c_{17} = \frac{\sin \alpha_{VII,IX}}{\sin 23}, \quad c_{16} = \frac{\sin \alpha_{VIII,IX}}{\sin 23}; \quad c_{15} = T_{15-17} c_{17},$$

$$c_{14} = T_{14-17} c_{17};$$

$$d_{17} = \frac{\cos \alpha_{VII,IX}}{\sin 23}, \quad d_{16} = \frac{\sin \alpha_{VIII,IX}}{\sin 23}; \quad d_{15} = T_{15-17} d_{17},$$

$$d_{14} = T_{14-17} d_{17}. \qquad (6)$$

Формулы (3) состоят из двух частей. Первая содержит поправки сторон цепи треугольников, которая соединяет пункт *VI* с необходимым дирекционным углом $\alpha_{III,IV}$, включая сторону s_6. Вторая часть (δx_{III} и δy_{III}) имеет (см. формулу (4) в работе [2]) поправки сторон цепи треугольников, соединяющей пункт *III* с исходным $\alpha_{A,I}$ и образуется по известным правилам

[2]. Первая часть подчиняется тем же правилам, если пункт III условно считать исходным.

Формулы (5) с учетом (3) имеют три части. Третья часть состоит из поправок цепи треугольников, заключенной между необходимым дирекционным углом $\alpha_{VI, VII}$ и пунктом IX, и также образуется по правилам [2], если пункт VI условно считать исходным.

Таким образом, необходимые дирекционные углы связующих сторон делят формулы поправок координат на независимые друг от друга части. Каждую из них можно записать, пользуясь правилами, изложенными в работе [2]. При этом пункт, расположенный на конце стороны с необходимым дирекционным углом, и координаты которого вычисляют без участия этого дирекционного угла, следует условно считать исходным.

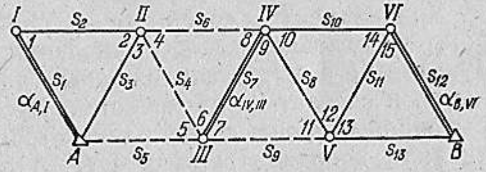

Рис. 2. Цепь треугольников с избыточными сторонами s_4, s_5, s_6 и s_9.

Если в цепи треугольников (рис. 2) координаты пунктов I и II определять от исходных A и $\alpha_{A,I}$, координаты VI, V и IV — от B и $\alpha_{B,VI}$, а координаты III — от IV с использованием $\alpha_{IV, III}$, то условные уравнения избыточных сторон s_4, s_5, s_6 и s_9 получим, заменив в уравнениях поправок этих сторон поправки координат пунктов II, IV, V их значениями по правилам, данным в работе [2], и пункта III согласно (1).

Рассмотрим условные уравнения сторон, связанных с пунктом III.

Уравнение стороны s_4 имеет вид:

$$-v_4+\frac{\sin(2+3)}{\sin 2}v_3-\frac{\sin 3}{\sin 2}v_2+\frac{\sin 3}{\sin 2}\cos 1\cdot v_1+\cos 6\cdot v_7+$$
$$+\frac{\sin(\alpha_{V,IV}-\alpha_{II,III})}{\sin 10}v_{10}+\frac{\sin(\alpha_{II,III}-\alpha_{VI,IV})}{\sin 10}v_8+$$
$$+\frac{\sin(12+13)}{\sin 13}\cdot\frac{\sin(\alpha_{VI,IV}-\alpha_{II,III})}{\sin 10}v_{11}+\frac{\sin 12}{\sin 13}\times$$
$$\times\frac{\sin(\alpha_{II,III}-\alpha_{VI,IV})}{\sin 10}v_{13}+\left[\frac{\sin(12+13)}{\sin 13}\cdot\frac{\sin(\alpha_{II,III}-\alpha_{VI,IV})}{\sin 10}\times\right.$$
$$\left.\times\sin 15+\frac{\sin(\alpha_{II,III}-\alpha_{V,IV})}{\sin 10}\cos(14+15)\right]v_{12}+l_4=0. \quad (7)$$

Применяя принятую в работе [1] форму записи типовых условных уравнений, получаем

$$-v_4+a_3v_3-a_2v_2+a_2\cos 1\cdot v_1+\cos 6\cdot v_7+a_{10}v_{10}-a_8v_8+a_{11}v_{11}-$$
$$-a_{13}v_{13}-[a_{11}\cos 15+a_{10}\cos(14+15)]v_{12}+l_4=0, \quad (8)$$

где $$a_3 = T_{3-4}, \quad a_2 = T_{2-4}; \qquad (9а)$$

$$a_{10} = \frac{\sin(\alpha_{VI,IV} - \alpha_{II,III})}{\sin 10}, \quad a_8 = \frac{\sin(\alpha_{VI,IV} - \alpha_{II,III})}{\sin 10};$$

$$a_{11} = T_{11-8} a_8, \quad a_{13} = T_{13-8} a_8. \qquad (9б)$$

Уравнение (8) содержит поправку v_4 и поправки всех сторон, участвовавших в вычислении приближенных координат пунктов *II* и *III*, расположенных на концах избыточной стороны s_4, и состоит из двух частей. Первая включает поправку избыточной стороны s_4, поправки сторон s_1, s_2, s_3, по которым вычисляли координаты пункта *II*, и поправку стороны s_7, имеющей необходимый дирекционный угол. Знаки коэффициентов в уравнении и их формулы, как и следовало ожидать, образуются по тем же правилам, что знаки и формулы коэффициентов типовых уравнений сторон [1]. Вторую часть уравнения составляют поправки сторон s_{10}, s_8, s_{11}, s_{13} и s_{12}, которые использовались для вычисления приближенных координат пункта *IV*. Знаки коэффициентов при поправках v_{10}, v_8, v_{11}, v_{13} и v_{12} зависят от формул коэффициентов a_{10} и a_8 (9б). Знаменателем формул a_{10} и a_8 служит синус угла между сторонами s_{10} и s_8, числителями — синусы разностей дирекционных углов. Если в разностях поменять местами дирекционные углы, то изменятся знаки коэффициентов в уравнении. То же произойдет и в том случае, если один из дирекционных углов изменить на 180° (например, вместо $\alpha_{II,III}$ взять $\alpha_{III,II}$). Значит, чтобы установить правило знаков, необходимо сначала вывести правило вычисления коэффициентов a_{10} и a_8, то есть коэффициентов при поправках пары сторон, определяющей пункт *IV*, расположенный на конце стороны, имеющей необходимый дирекционный угол.

В формулах (9б) используются дирекционные углы направлений на пункты *III* и *IV* ($\alpha_{V,IV}$, $\alpha_{VI,IV}$, $\alpha_{II,III}$), расположенные на концах стороны, которая имеет необходимый дирекционный угол. Знаки a_{10} и a_8 не изменятся, если все дирекционные углы изменить на 180°, то есть взять $\alpha_{IV,V}$, $\alpha_{IV,VI}$ и $\alpha_{III,II}$. Указанные направления дирекционных углов примем в качестве предварительного условия, исходя из которого будем формулировать правила образования коэффициентов и правила знаков.

В формуле коэффициента при поправке стороны s_{10} участвует дирекционный угол парной ей стороны s_8, а в формуле a_8 — дирекционный угол стороны s_{10}. Разности дирекционных углов вычисляют по правилу: дирекционный угол необходимой стороны минус дирекционный угол избыточной. Правило знаков в этом случае совпадает с правилом знаков коэффициентов в формуле δx_N [2]: плюс имеют коэффициенты при поправках сторон, которые образуют левые направления, и минус — при поправках сторон, образующих правые направления углов (имеются в виду углы, образованные каждой парой необходимых сторон). Если же в формулах a_{10} и a_8 разности дирекционных углов вычислять по правилу: дирекционный угол избыточной стороны минус дирекционный угол необходимой, то в (8) знаки коэффициентов a_{10}, a_8, a_{11}, a_{13} и знак коэффициента при v_{12} необходимо поменять на противоположные, что будет соответствовать правилу знаков в формуле δy_N [2].

Коэффициенты при v_{11}, v_{13} и v_{12} образуются по правилам образования коэффициентов типовых условных уравнений сторон [1].

Свободным членом видоизмененного типового условного уравнения стороны служит свободный член уравнения поправок избыточной стороны.

Избыточной стороне s_5 соответствует уравнение:

$$-v_5+\cos(5+6)\cdot v_7+b_{10}v_{10}-b_8v_8+b_{11}v_{11}-b_{13}v_{13}-$$
$$-[b_{11}\cos 15+b_{10}\cos(14+15)]v_{12}+l_5=0, \qquad (10)$$

где $b_{10}=\dfrac{\sin(\alpha_{V,IV}-\alpha_{A,III})}{\sin 10}$, $b_8=\dfrac{\sin(\alpha_{VI,IV}-\alpha_{A,III})}{\sin 10}$;

$$b_{11}=T_{11-8}b_8, \quad b_{13}=T_{13-8}b_8. \qquad (11)$$

Или же

$$-v_5+\cos(5+6)v_7-b_{10}v_{10}+b_8v_8-b_{11}v_{11}+b_{13}v_{13}+$$
$$+[b_{11}\cos 15+b_{10}\cos(14+15)]v_{12}+l_5=0, \qquad (12)$$

где $b_{10}=\dfrac{\sin(\alpha_{A,III}-\alpha_{V,IV})}{\sin 10}$, $b_8=\dfrac{\sin(\alpha_{A,III}-\alpha_{VI,IV})}{\sin 10}$;

$$b_{11}=T_{11-8}b_8, \quad b_{13}=T_{13-8}b_8. \qquad (13)$$

Пункт A исходный, поэтому в (10) и (12) входят лишь поправки сторон, которые участвовали в вычислениях приближенных координат пункта III, и поправка избыточной стороны s_5. Знаки коэффициентов в уравнениях и формулы (11) и (13) полностью согласуются с установленными правилами.

Для избыточной стороны s_9 получаем

$$-v_9+\cos 7\cdot v_7+\frac{\sin(\alpha_{V,III}-\alpha_{VI,IV})}{\sin 10}v_8+\frac{\sin(\alpha_{V,IV}-\alpha_{V,III})}{\sin 10}v_{10}+$$
$$+\left[-\frac{\sin(11+12)}{\sin 13}+\frac{\sin 12}{\sin 13}\cdot\frac{\sin(\alpha_{V,III}-\alpha_{VI,IV})}{\sin 10}\right]v_{13}+$$
$$+\left[\frac{\sin(11+12+13)}{\sin 13}+\frac{\sin(12+13)}{\sin 13}\cdot\frac{\sin(\alpha_{VI,IV}-\alpha_{V,III})}{\sin 10}\right]v_{11}+$$

$$+\left\{\left[-\frac{\sin(11+12+13)}{\sin 13}+\frac{\sin(12+13)}{\sin 13}\cdot\frac{\sin(\alpha_{V,III}-\alpha_{VI,IV})}{\sin 10}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\cos 15+\frac{\sin(\alpha_{V,III}-\alpha_{V,IV})}{\sin 10}\cos(14+15)\right\}v_{12}+l_9=0. \qquad (14)$$

В привычной форме записи уравнение имеет вид:

$$-v_9+\cos 7v_7-c_8v_8+c_{10}v_{10}-c_{13}v_{13}+c_{11}v_{11}-$$
$$-[c_{11}\cos 15+c_{10}\cos(14+15)]v_{12}+l_9=0, \qquad (15)$$

где $c_8=\dfrac{\sin(\alpha_{VI,IV}-\alpha_{V,III})}{\sin 10}$, $c_{10}=\dfrac{\sin(\alpha_{V,IV}-\alpha_{V,III})}{\sin 10}$.

$$c_{13}=T_{13-9}+T_{13-8}c_8, \quad c_{11}=T_{11-9}+T_{11-8}c_8. \qquad (16)$$

Покажем, что уравнение (15) и формулы (16) подчиняются установленным выше правилам. Видоизмененное типовое условное уравнение стороны s_9 должно состоять из двух частей. Одна содержит поправку v_9, поправки сторон s_{11}, s_{13} и s_{12}, по которым вычислялись приближенные координаты пункта V, и поправку стороны s_7, имеющей необходимый дирекционный угол. Знаки и формулы коэффициентов этой части должны соответствовать правилам составления типового уравнения стороны [1]. Так что

$$-v_9+\cos 7v_7+\overset{V}{c}_{11}v_{11}-\overset{V}{c}_{13}v_{13}-\overset{V}{c}_{11}\cos 15\cdot v_{12}, \qquad (17)$$

где $$\overset{V}{c}_{11}=T_{11-9}, \quad \overset{V}{c}_{13}=T_{13-9}. \qquad (18)$$

Необходимо, чтобы вторая часть уравнения содержала поправки сторон s_8, s_{10}, s_{11}, s_{13} и s_{12}, которые использовались для вычисления приближенных координат пункта IV. В этой части знаки коэффициентов зависят от формул коэффициентов c_8 и c_{10}. Если поставить условие: знаки $\overset{IV}{c}_{13}$ и $\overset{IV}{c}_{11}$ равны знакам $\overset{V}{c}_{13}$ и $\overset{V}{c}_{11}$ в (17), то вторая часть должна иметь вид

$$c_{10}v_{10}-c_8v_8+\overset{IV}{c}_{11}v_{11}-\overset{IV}{c}_{13}v_{13}-[c_{10}\cos(14+15)+\overset{IV}{c}_{11}\cos 15]v_{12} \qquad (19)$$

и коэффициенты нужно вычислять

$$c_{10}=\frac{\sin(\alpha_{V,IV}-\alpha_{V,III})}{\sin 10}, \quad c_8=\frac{\sin(\alpha_{VI,IV}-\alpha_{V,III})}{\sin 10};$$

$$\overset{IV}{c}_{11}=T_{11-8}c_8, \quad \overset{IV}{c}_{13}=T_{13-8}c_8. \qquad (20)$$

Соединив (17) и (19), приведя подобные члены и дописав свободный член, получим (15).

Уравнение (14) можно также записать в виде:

$$-v_9+\cos 7 v_7+c_8v_8-c_{10}v_{10}+(\overset{IV}{c}_{13}-\overset{V}{c}_{13})v_{13}+(-\overset{IV}{c}_{11}+\overset{V}{c}_{11})v_{11}+$$

$$+[(\overset{IV}{c}_{11}-\overset{V}{c}_{11})\cos 15+c_{10}\cos(14+15)]v_{12}+l_9=0, \qquad (21)$$

где $c_{10}=\dfrac{\sin(\alpha_{V,III}-\alpha_{V,IV})}{\sin 10}$, $c_8=\dfrac{\sin(\alpha_{V,III}-\alpha_{VI,IV})}{\sin 10}$;

$$\overset{IV}{c}_{13}=T_{13-8}c_8, \quad \overset{IV}{c}_{11}=T_{11-8}c_8; \quad \overset{V}{c}_{13}=T_{13-9}; \quad \overset{V}{c}_{11}=T_{11-9}. \qquad (22)$$

В (21) коэффициенты при одноименных поправках в первой и второй части уравнения имеют противоположные знаки. Сравнивая уравнения (15) и (21), видим, что уравнение вида (15) более удобно и ему, очевидно, следует отдать предпочтение. Следовательно, если приближенные координаты пунктов, расположенных на концах избыточной стороны, вычисляют с участием одних и тех же сторон, то при составлении видоизмененного типового условного уравнения желательно иметь одинаковые знаки коэффициентов при одноименных поправках в первой и второй частях уравнения. Для этого необходимо, пользуясь знаками коэффициентов первой части уравнения, проставить на схеме знаки коэффициентов при поправках сторон второй части и, имея знаки, записать соответствующие формулы коэффициентов при поправках пары сторон, определяющей пункт, который расположен на конце стороны с необходимым дирекционным углом.

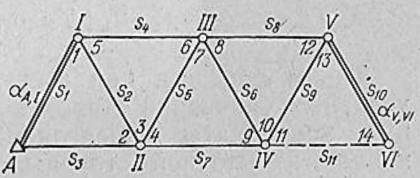

Рис. 3. Составление видоизмененного типового условного уравнения стороны s_{11}.

Коэффициент при поправке стороны, имеющей необходимый дирекционный угол, всегда равен косинусу угла (со знаком плюс) между этой стороной и избыточной. Формулы коэффициентов при поправках остальных сторон составляются по правилам образования коэффициентов типового условного уравнения стороны [1].

Составим для примера видоизмененное типовое условное уравнение стороны s_{11} (рис. 3). По взаимному расположению избыточной стороны s_{11} и сторон s_7 и s_6, определяющих пункт *IV*, устанавливают знаки коэффициентов a_7 и a_6: знак a_7 равен знаку коэффициента при v_{11}; знак a_6 — противоположный. Знаками a_7 и a_6 определяются знаки коэффициентов при поправках всех сторон цепи: знаки a_4, a_2 и a_8 должны быть равны знаку

a_6 (стороны s_4, s_2, s_8 и s_6 образуют правые направления углов), а знаки a_5, a_3 и a_9 — знаку a_7.

Полученные знаки коэффициентов подчиняются правилу знаков в формуле δy_N [2], значит, в формулах a_8 и a_9 разности дирекционных углов должны вычисляться по правилу: дирекционный угол избыточной стороны минус дирекционный угол необходимой.

Уравнение и формулы коэффициентов имеют вид:

$$-v_{11}+\cos 14\cdot v_{10}-a_9v_9+a_8v_8-a_7v_7+a_6v_6-a_5v_5+a_4v_4-$$
$$-a_3v_3+a_2v_2-[a_2\cos 1+a_4\cos (1+5)]v_1+l_{11}=0, \qquad (23)$$

где $a_9=\dfrac{\sin(\alpha_{IV,VI}-\alpha_{III,V})}{\sin 12}$, $a_8=\dfrac{\sin(\alpha_{IV,VI}-\alpha_{IV,V})}{\sin 12}$;

$$a_7=T_{7-9}a_9+T_{7-11}, \quad a_6=T_{6-9}a_9+T_{6-11};$$
$$a_5=T_{5-6}a_6+T_{5-8}a_8, \quad a_4=T_{4-6}a_6+T_{4-8}a_8;$$
$$a_3=T_{3-5}a_5+T_{3-7}a_7, \quad a_2=T_{2-5}a_5+T_{2-7}a_7. \qquad (24)$$

Таким образом, при составлении видоизмененных типовых условных уравнений сторон возможны два случая: приближенные координаты определяемых пунктов, расположенных на концах избыточной стороны, вычисляют по двум различным цепям треугольников от двух групп исходных данных и приближенные координаты обоих пунктов вычисляются с участием одних и тех же сторон. И в первом, и во втором случае уравнение и формулы его коэффициентов легко записать, пользуясь установленными едиными правилами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кваснюк Б. П. Об уравнивании сетей трилатерации по способу условий. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 20.

2. Кваснюк Б. П. О составлении весовых функций в трилатерации. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1975, вып. 22.

Работа поступила 29 декабря 1975 года
Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.