$$\sigma_1^2 = \frac{[\Delta'^2]}{n}; \quad (14)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{[\Delta''^2]}{n}, \quad (15)$$

где n — число измерений.

На основании данных таблицы можно сделать такие выводы.

1. Дисперсии σ_1^2 и σ_2^2, вычисленные двумя методами после введения поправок за температуру и влажность, значительно меньше дисперсии σ^2, вычисленной без введения указанных поправок. Значения σ_1^2 и σ_2^2 практически одинаковы.

2. Метод А. Л. Островского дает положительные результаты при наличии ощутимых уклонов измеряемых линий. Для метода, описанного в нашей работе, такого ограничения нет.

3. По предлагаемой нами методике поправки ΔS_T и ΔS_e можно вычислять без измерения зенитных расстояний по значениям температуры, определяемым на двух уровнях в конечных точках линии.

Список литературы: 1. *Вировец Ю. Б., Наумов Я. В., Островский А. Л.* Эталонный геодезический полигон в горном районе. — Геодезия и картография, 1971; № 12. 2. *Матяшук И. С.* Введение поправок за температуру и влажность при радиодальномерных измерениях. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 3. *Островский А. Л.* Дифференцированный метод преодоления метеорологического барьера при радиодальномерных измерениях. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 27.

Статья поступила в редколлегию 09.04.82

УДК 528.14

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, С. Д. ВОЛЖАНИН

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА L_p-ОЦЕНОК ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ОБЩЕЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

В геодезии, астрономии и других прикладных науках часто возникает задача уравнивания результатов измерений. При этом обычно используется методика, заключающаяся в поиске элементов наилучшего квадратичного приближения и сводящаяся к алгоритмам метода наименьших квадратов. Вместе с тем в последнее время усиленно разрабатываются другие приемы обработки результатов измерений [1, 5, 6, 7]. В частности, предложены методы, основанные на принципе минимизации расстояния между искомым вектором $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)\in R^n$ и его оценкой $\tilde{Y}=(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)\in R^n$ в метрике l_p

$$\| Y - \tilde{Y} \| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \tilde{y}_i - y_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ p \geqslant 1.$$

Поэтому «уравненное» значение $\tilde{Y}$ определяемой величины принято называть ее L_p-оценкой.

Такая постановка задачи приводит к широкому обобщению ряда применяемых принципов и основанных на них методов обработки результатов измерений. Так, при $p=2$ имеет место условие метода наименьших квадратов

$$\| Y - \tilde{Y} \|_{l_2} = \sum_i (\tilde{y}_i - y_i)^2 \to \min,$$

при $p=1$ — метода наименьших модулей

$$\| Y - \tilde{Y} \|_{l_1} = \sum_i | \tilde{y}_i - y_i | \to \min,$$

при $p=\infty$ — метода равномерных приближений

$$\| Y - \tilde{Y} \|_{l_\infty} = \max | \tilde{y}_i - y_i | \to \min.$$

С вероятностной точки зрения указанные частные случаи отражают применение метода максимального правдоподобия соответственно для нормального, экспоненциального и равномерного распределения ошибок измеренных величин. При этом получаемые для этих распределений L_p-оценки являются несмещенными [1]. При $1\leqslant p<2$ L_p-оценки оказываются более устойчивыми по отношению к грубым ошибкам измерений, нежели результаты обработки по методу наименьших квадратов. В тех случаях, когда закон распределения ошибок заранее не известен, имеет смысл рассмотреть также L_p-оценки и при $p\gg 2$.

Методика получения L_p-оценок рассмотрена в ряде работ, в частности Е. З. Демиденко [1], В. И. Мудровым и В. Л. Кушко [5]. Имеется возможность сравнительно просто уравнивать результаты измерений методом L_p-оценок в рамках единого итеративного алгоритма, получившего название «итеративного метода наименьших квадратов» (ИМНК) Флетчера—Гранта—Хобдена, вычислительная сторона которого по [1] заключается в следующем. Запишем в матричном виде систему n линейных уравнений ошибок с m неизвестными $(n>m)$

$$AX+L=V, \quad (1)$$

где $A=(a_{ij})_{nm}$ — матрица коэффициентов системы уравнений; $X^T=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ — вектор свободных членов; $V^T=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ — вектор поправок.

Решение системы (1) находим при условии

$$\| \tilde{X} \|_{l_p} = \sum_{i=1}^{n} | V_i |^p \equiv Q(x) \to \min. \quad (2)$$

Перепишем (2) в виде

$$\|\tilde{X}\|_{e_p} = \sum_{i=1}^{n} |V_i|^{p-2} V_i^2 \qquad i = 1,2,\cdots n. \tag{3}$$

Очевидно, искомое решение переопределенной системы уравнений (1) эквивалентно решению той же самой системы по методу наименьших квадратов с весовой матрицей

$$c_{ij} = \begin{cases} |V_i|^{p-2} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \cdots n. \tag{4}$$

Тогда решение запишем в виде

$$X = -(A^T CA)^{-1} A^T CL. \tag{5}$$

Однако, учитывая, что в уравнении (5) неизвестными, кроме вектора X, является также матрица C (V_i связано с искомым X уравнением (1)), то решение (5) возможно лишь методом последовательных приближений. При этом начальная итерация осуществляется при $p=2$, что соответствует схеме классического МНК. Вектор неизвестных затем уточняется на последующих итерациях уже при заданном $p \neq 2$, когда матрица C в ν-итерации вычисляется по формуле (4) с использованием X. Сходимость такого итерационного процесса при $1 \leqslant p < 2$ доказана в [5], при $p > 2$ указанный итеративный процесс расходится. Однако и в этом случае решение может быть получено за счет применения модифицированного ИМНК (см. [1]), когда получаемый на ν-итерации вектор $\hat{X}^{(\nu)}$ оценок подправляется по формуле

$$X^{(\nu)} = (1-G)\, X^{(\nu-1)} + G\hat{X}^{(\nu)}, \tag{6}$$

где

$$G = \frac{1}{(p-1)}.$$

При вычислении элементов матрицы С приходится возводить $|V_i|$ в степень $(p-2)$, поэтому перед выполнением последующей итерации имеет смысл нормировать матрицу C следующим образом:

$$c_{ii}^* = \frac{c_{ii}}{|V|_{max}} \qquad i = 1, 2, \cdots n,$$

что естественно не изменит оценку параметров X и не приведет к потере точности.

Приведем пример применения метода L_p-оценок при различных p для решения задачи аппроксимации геоида, соответствующего известным моделям геопотенциала двухосным эллипсоидом. Искомыми являются значения большой полуоси a и сжатия α двухосного эллипсоида, наилучшим образом, в смысле (2), приближающего геоид. Уравнение поправок в этом случае имеет вид [2]

$$-N(1 - e^2 \sin^2 B)\, \delta a' + M(1 - e^2 \sin^2 B) \sin^2 B\, \delta\alpha' + \zeta' = \zeta, \tag{7}$$

$$e^2 = \alpha^2 - 2\alpha,$$

где M и N — радиусы кривизны соответственно меридиана и первого вертикала; ζ — высота геоида относительно искомого эллипсоида; ζ' — то же относительно исходного эллипсоида с полуосью a' и сжатием α'; $\delta a'$ и $\delta\alpha'$ — искомые поправки, соответственно к значениям полуоси a' и сжатия α'. Уравнения вида (7) составлялись для средних точек равновеликих трапеций $10 \times 10°$ на экваторе.

Решалась переопределенная система 416 линейных уравнений относительно двух неизвестных при условии

$$\sum_{i=1}^{416} |\xi_i|^p \to \min.$$

Свободный член ζ' вычислялся по формуле

$$\zeta' = \rho_i - r_i^0, \tag{8}$$

где r_i^0 — радиус-вектор исходного эллипсоида; ρ_i — радиус-вектор геоида, полученный по методике [4] с точностью 0,001 м.

В таблице приведены L_p-оценки параметров двухосного эллипсоида, число итераций ИМНК, а также среднеквадратические отклонения аппроксимируемой поверхности геоида от эллипсоида по трем моделям гравитационного поля SAO—5, SAO—6 и GEM—10B. Эти результаты наглядно подтверждают зависимость уравнивания от принципа, положенного в его основу, т. е. зависимость результатов L_p-оценивания от величины p. В таблицу не включены максимальные отклонения геоида от аппроксимирующих их эллипсоидов $|V|_{max}$. Но интересно отметить, что при увеличении p они систематически уменьшаются. Если при $p=2$ $|V|_{max}$ составляло 111 м, то при $p=\infty$ оно равно 90,5 м (SAO—5), 89,2 (SAO—6) и 88,1 м (GEM—10B). Безусловно, при этом среднеквадратические отклонения равны минимуму при $p=2$, мало отличаются от них (конечно в сторону увеличения) при $1 \leqslant p < 2$ и увеличиваются при $p \to \infty$.

Как известно, при $p=1$ нулевых остаточных отклонений не может быть меньше, чем число искомых параметров, а при $p=\infty$ число максимальных по абсолютной величине остаточных отклонений на одно больше числа неизвестных. Для модели GEM—10B местоположение точек с приведенными выше максимальными отклонениями такое: в Индийском океане $\varphi=0°$, $\lambda=80°$ в. д., $\zeta=-88,1$ м; в Атлантическом $\varphi=60°$ с. ш., $\lambda=20°$ з. д., $\zeta=+88,1$ м; в Тихом океане $\varphi=0°$, $\lambda=140°$ в. д., $\zeta=+88,1$ м.

Вспомним, что при вычислении поверхности геоида, радиус-вектор которой входит в уравнение ошибок, использовались параметры гравитационного поля Земли, полученные авторами соответствующих моделей на основе метода наименьших квадратов, и

Результаты аппроксимации при различных p

p	SAO-5 1	SAO-5 2	SAO-5 3	SAO-5 4	SAO-6 1	SAO-6 2	SAO-6 3	SAO-6 4	GEM-10 B 1	GEM-10 B 2	GEM-10 B 3	GEM-10 B 4
1,0	37	298,341	6378135,0	30,66	6	298,260	6378137,0	30,34	11	298,244	6378136,9	30,45
1,2	18	„ ,285	136,5	30,62	8	„ ,256	„ 137,3	30,34	15	„ ,244	„ 137,1	30,45
1,8	3	„ ,257	137,1	30,61	4	„ ,254	„ 137,2	30,34	4	„ ,252	„ 137,2	30,44
2,0	1	„ ,257	137,0	30,61	1	„ ,258	„ 137,0	30,34	1	„ ,257	„ 137,0	30,44
3,0	2	„ ,290	135,7	30,62	2	„ ,293	„ 135,5	30,36	2	„ ,300	„ 135,3	30,46
10,0	4	„ ,522	127,6	31,28	4	„ ,506	„ 126,9	31,08	4	„ ,483	„ 127,1	31,15
60,0	11	„ ,810	123,8	32,80	12	„ ,761	„ 122,4	32,29	11	„ ,635	„ 123,2	31,85
100,0	16	„ ,836	123,8	33,00	18	„ ,785	„ 122,3	32,43	17	„ ,652	„ 123,1	31,90
200,0	251	„ ,854	123,8	33,11	154	„ ,804	„ 122,3	32,54	41	„ ,665	„ 123,0	31,94
(5) ∞	—	297,988	124,2	36,60	—	297,913	„ 122,8	38,49	—	„ ,103	„ 123,4	35,17

1 — число итераций ИМНК;
2 — знаменатель сжатия α;
3 — большая полуось a;
4 — среднеквадратическое отклонение геоида от эллипсоида;
5 — решение при $p \to \infty$ получено методами линейного программирования [3].

наиболее устойчивые результаты определения параметров ОЗЭ получены также при $p=2$: значение большой полуоси двухосного эллипсоида оказалось равным 6378137 м (отличие для разных моделей геопотенциала в пределах 1 м), а знаменатель сжатия — 298,257 (с различием в пределах 0,001), что полностью совпадает со значениями, рекомендованными МГГС в 1979 году.

Варианты счета, выполненные при $p \leqslant 600$, показали, что соответствующие значения a возрастают до максимального, равного 6378137,1 при $p=1{,}8$, а затем убывают; значение $1:\alpha$ увеличивается до 299 при $p \approx 600$, затем уменьшается. В предельном случае $p=\infty$, $a=6378\,123$, $\alpha=1:298{,}0$.

Использование обобщенных методов оценивания открывает реальные возможности дальнейшего уточнения обсуждаемых параметров эллипсоида, что в первую очередь обусловливает необходимость установления по результатам измерительной информации оптимального значения p.

Список литературы: 1. *Демиденко Е. З.* Линейная и нелинейная регрессия. — М.: Финансы и статистика, 1981. 2. *Закатов П. С.* Курс высшей геодезии. — М.: Недра, 1976. 3. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. — М.: Наука, 1964. 4. *Мещеряков Г. А.* О сфероиде Клеро, обобщающем поверхность Марса. — В кн.: Картографирование Луны и Марса. М.: Недра, 1978. 5. *Мудров В. И., Кушко В. Л.* Методы обработки измерений. — М.: Сов. радио, 1976. 6. *Скрыль В. А.* О применении метода чебышевского приближения для уравнительных вычислений. — В сб.: Проблемы математической обработки геодезических сетей. Новосибирск, 1979. 7. *Kadaj R.* Rozwiniecie koncepcji niestandartowej metody estimacji, Geod. i kartogr., 1980, 29, N 3—4.

Статья поступила в редколлегию 25. 03. 82

УДК 528.11

И. И. МОНИН

К ОЦЕНИВАНИЮ ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

В практике геодезических работ для оценки надежности построения геодезических сетей применяют оценку точности наиболее ненадежного элемента. При обработке геодезических сетей коррелатным методом чаще всего оценивают дирекционный угол наиболее слабой стороны сети или ее длину. Если же сеть обрабатывают параметрическим методом, то оценке подвергают координаты точки, наиболее удаленной от жестких пунктов. В учебниках [1, 4] приводятся формулы, необходимые для оценки точности.

В настоящее время в связи с широким применением ЭВМ алгоритмы обработки и уравнивания записываются в матричной форме, так как это удобно для машинного счета и, кроме того, значительно сокращает изложение.

В книгах [2, 3] приведены формулы для оценки элементов в матричной записи. Выводы этих формул сложны и трудны для изучения. В учебнике [4] дан вывод формулы для определения