УДК 528.21+531.26

А. Н. МАРЧЕНКО

О ВЫЧИСЛЕНИИ МОМЕНТОВ ГРАВИТАЦИОННЫХ МУЛЬТИПОЛЕЙ ЗЕМЛИ

В последнее время при разложении внешнего гравитационного потенциала в ряд по шаровым функциям

$$V=\sum_{n=0}^{\infty} V_n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}, \tag{1}$$

наряду с обычным представлением сферической поверхностной функции $Y_n(\vartheta, \lambda)$ «игреком Лапласа» [1]

$$Y_n = fMa^n \sum_{m=0}^{n} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_n^m (\cos \vartheta), \qquad (2)$$

начинают пользоваться ее максвелловой формой записи [11]

$$Y_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} M_n \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_n} \left(\frac{1}{r} \right), \qquad (3)$$

в результате каждый член ряда (1) трактуется как потенциал V_n мультиполя n-го порядка — точечного объекта в начале системы координат [2]. С учетом последнего в выражении (3) M_n — момент, а $\vec{h}_i$ — оси мультиполя n-го порядка или сферической функции того же порядка $(i=1, 2, \ldots, n)$; $\frac{\partial}{\partial h_i}$ означает дифференцирование по направлению $\vec{h}_i$. Точку пересечения положительного направления оси $\vec{h}_i$ со сферой называют полюсом сферической функции или соответствующего ей мультиполя.

Использование максвелловой формы записи V_n (с учетом (1)) как потенциала мультиполя, предполагает знание координат полюсов и момента последнего, то есть $(2n+1)$ констант, отвечающих $(2n+1)$ стоксовым постоянным Земли C_{nm}, S_{nm} при общепринятом представлении ее гравитационного потенциала. И если задача нахождения осей гравитационных мультиполей Земли уже решена и в теоретическом [5, 6], и в практическом [7] плане, то вопрос об определении моментов мультиполей требует еще некоторых исследований. Цель настоящей работы — обсуждение возможных путей решения указанной задачи и их реализация на практике. Отметим при этом, что исходными данными будем считать стоксовы постоянные Земли и координаты полюсов ее гравитационных мультиполей.

Момент M_n легко найти сравнением представления (2) сферической функции Y_n с соотношением $Y_n = M_n Y_n^*$, где Y_n по Максвеллу есть функция косинусов углов между осями сферической функции $\vec{h}_i$ и косинусов углов между радиусом-вектором r и осями $\vec{h}_i$ [11, 1]. Так, выбрав текущую точку, напри-

---

[1] В формулах (1) и (2) r, ϑ, λ — геоцентрические координаты; f — гравитационная постоянная; M — масса Земли; C_{nm}, S_{nm} — стоксовы постоянные планеты; a — ее экваториальный радиус; $P_n^m(\cos \vartheta)$ — присоединенные функции Лежандра.

мер, в северном полюсе ($\vartheta=0°$), получим следующее выражение для определения момента

$$M_n=\frac{fMa^nC_{n0}}{Y_n^*}, \tag{4}$$

где величина Y_n^* предполагается вычисленной в северном полюсе ($\vartheta=0°$). Соотношение (4) апробировано в практических приложениях [3, 4], однако, несмотря на простоту теоретической основы, его применение при $n>4$ трудоемко и нерационально даже при использовании ЭЦВМ. Это объясняется главным образом сложностью максвеллового алгоритма написания сферической функции (1) при $n>4$. В связи с этим формулу (4) можно рекомендовать лишь для вычисления моментов мультиполей низших порядков.

Рассмотрим теперь существенный результат Джеймса [10], полученный им при изучении вопроса о преобразовании сферических гармоник. Пусть $V_n=r^{-(n+1)}Y_n(\vartheta, \lambda)$ — шаровая функция и

$$Y_n=\sum_{m=0}^{n}(A_n^m\cos m\lambda+B_n^m\sin m\lambda)\bar{\bar{P}}_n^m(\cos\vartheta) — \tag{5}$$

сферическая поверхностная функция, причем $\bar{\bar{P}}_n(\cos\vartheta)$ — квазинормированная по Шмидту присоединенная функция Лежандра, то есть

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\bar{P}}_n^m(\cos\vartheta)=P_n^0(\cos\vartheta)=P_n(\cos\vartheta)\quad(m=0);\\&\bar{\bar{P}}_n^m(\cos\vartheta)=P_n^m(\cos\vartheta)\cdot\sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}}\quad(1\leqslant m\leqslant n).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

С учетом соотношений (6) также предполагаются нормированными гармонические коэффициенты A_n^m, B_n^m. Теперь, если $\bar{u}$ — любой постоянный вектор с координатами (u, v, w), а ∇ — векторный оператор $\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)$, то можно показать [10], что

$$-(\bar{u}\cdot\nabla)\left[r^{-(n+1)}\sum_{m=0}^{n}(A_n^m\cos m\lambda+B_n^m\sin m\lambda)\times\right.$$

$$\left.\times\bar{\bar{P}}_n^m(\cos\vartheta)\right]=r^{-(n+2)}\sum_{m=0}^{n+1}(A_{n+1}^m\cos m\lambda+B_{n+1}^m\sin m\lambda)\times$$

$$\times\bar{\bar{P}}_{n+1}^m(\cos\vartheta), \tag{7}$$

где для $m=0, 1, 2, \ldots, n+1$

$$\left.\begin{aligned} 2\overset{m}{A}_{n+1}&=u\left[(1+\delta_{m1})\overset{m}{\alpha}_{n+1}\overset{m-1}{A_n}-\overset{m}{\beta}_{n+1}\overset{m+1}{A_n}\right]-\\ &\qquad-v\left[\overset{m}{\alpha}_{n+1}\overset{m-1}{B_n}+\overset{m}{\beta}_{n+1}\overset{m+1}{B_n}\right]+2w\overset{m}{\gamma}_{n+1}\overset{m}{A_n};\\ 2\overset{m}{B}_{n+1}&=u\left[\overset{m}{\alpha}_{n+1}\overset{m-1}{B_n}-\overset{m}{\beta}_{n+1}\overset{m+1}{B_n}\right]+\\ &\qquad+v\left[(1+\delta_{m1})\overset{m}{\alpha}_{n+1}\overset{m-1}{A_n}+\overset{m}{\beta}_{n+1}\overset{m+1}{A_n}\right]+2w\overset{m}{\gamma}_{n+1}\overset{m}{B_n}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

причем $\overset{m}{A_n}=0$, когда $m<0$ или $m>n$; $\overset{m}{B_n}=0$, когда $m\leqslant 0$ или $m>n$; δ_{mp} — символ Кронекера;

$$\left.\begin{aligned} \overset{m}{\alpha}_{n+1}&=\left[\frac{1}{2}(2-\delta_{m1})(n+m)(n+m+1)\right]^{\frac{1}{2}};\\ \beta_{n+1}&=\left[(1+\delta_{m0})(n-m)(n-m+1)\right]^{\frac{1}{2}};\\ \overset{m}{\gamma}_{n+1}&=\left[(n-m+1)(n+m+1)\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Согласно выражению (7), если V_n — шаровая функция, а $\bar{u}_i$ ($i=1, 2, 3, \ldots, k$) — любой набор постоянных векторов, то

$$U=(\bar{u}_1\cdot\nabla)\cdot(\bar{u}_2\cdot\nabla)\ldots(u_k\cdot\nabla)V_n \qquad (10)$$

также шаровая функция (порядка $n+k$), причем ее гармонические коэффициенты легко находят [10] из гармонических коэффициентов V_n с помощью соотношений (8). Заметим, что в частном случае, когда $V_n=\frac{1}{r}=V_0$, слева в формуле (10) получаем шаровую функцию k-го порядка, коэффициенты $\overset{m}{A_k}$ и $\overset{m}{B_k}$ которой последовательно вычисляют с помощью рекуррентных формул (8), начиная с $A_0=1$, $B_0^0=0$.

Применим теперь этот алгоритм для определения моментов мультиполей. С учетом выражения оператора дифференцирования по направлению $\vec{h}_i$.

$$\frac{\partial}{\partial h_i}=a_i\frac{\partial}{\partial x}+b_i\frac{\partial}{\partial y}+c_i\frac{\partial}{\partial z}, \qquad (11)$$

где величины a_i, b_i, c_i считаем направляющими косинусами осей $\vec{h}_i$ сферической функции, и исходя из (3), Y_n запишем в виде

$$Y_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} M_n \prod_{i=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial}{\partial x} + b_i \frac{\partial}{\partial y} + c_i \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r} \tag{12}$$

или в векторной форме

$$Y_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} M_n \prod_{i=1}^{n} (\vec{h}_i \cdot \nabla) \frac{1}{r}. \tag{13}$$

Раскрывая правую часть выражения (13), согласно (7), имеем

$$Y_n = \frac{M_n}{n!} \sum_{m=0}^{n} (A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda) \bar{\bar{P}}_n^m (\cos \vartheta), \tag{14}$$

где коэффициенты A_n^m и B_n^m можно вычислить с помощью соотношений (8), записанных в следующей форме

$$\left.\begin{aligned} 2A_i^m &= a_i[(1+\delta_{m1})\alpha_i^m A_{i-1}^{m-1} - \beta_i^m A_{i-1}^{m+1}] - \\ &\qquad - b_i[\alpha_i^m B_{i-1}^{m-1} + \beta_i^m B_{i-1}^{m+1}] + 2c_i\gamma_i^m A_{i-1}^m; \\ 2B_i^m &= a_i[\alpha_i^m B_{i-1}^{m-1} - \beta_i^m B_{i-1}^{m+1}] + \\ &\qquad + b_i[(1+\delta_{m1})\alpha_i^m A_{i-1}^{m-1} + \beta_i^m A_{i-1}^{m+1}] + 2c_i\gamma_i^m B_{i-1}^m. \\ &(A_0^0 = 1,\ B_0^0 = 0;\ 1 \leqslant i \leqslant n). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

С другой стороны, Y_n возьмем теперь в следующем виде

$$Y_n = fMa^n \sum_{m=0}^{n} (\bar{\bar{C}}_{nm} \cos m\lambda + \bar{\bar{S}}_{nm} \sin m\lambda) \bar{\bar{P}}_n^m (\cos \vartheta), \tag{16}$$

где для присоединенных функций Лежандра и стоксовых постоянных Земли выполнено квазинормирование по Шмидту

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\bar{C}}_{n0} = C_{n0} \quad (m=0); \\ &\left.\begin{matrix}\bar{\bar{C}}_{nm} \\ \bar{\bar{S}}_{nm}\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}} \left\{\begin{matrix} C_{nm} \\ S_{nm}\end{matrix}\right. \quad (1 \leqslant m \leqslant n). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых сферических гармониках $\bar{\bar{P}}_n^m (\cos\vartheta) \cos m\lambda$ или $\bar{\bar{P}}_n^m (\cos\vartheta) \sin m\lambda$

в выражениях (14) и (16), легко получаем * соотношения для нахождения моментов гравитационных мультиполей (или соответствующих им сферических функций)

$$M_n = \frac{fMa^n \bar{\bar{C}}_{nm} \cdot n!}{A_n^m}; \quad M_n = \frac{fMa^n \cdot \bar{\bar{S}}_{nm} \cdot n!}{B_n^m}. \tag{18}$$

Выражения (18) удобно несколько преобразовать, так как при определении гармоник гравитационного поля C_{nm}, S_{nm} их нормируют не по Шмидту, а следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \bar{C}_{n0} &= \frac{C_{n0}}{\sqrt{2n+1}} \quad (m=0); \\ \left.\begin{aligned}\bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm}\end{aligned}\right\} &= \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(2n+1)(n-m)!}} \left\{\begin{aligned} C_{nm} \\ S_{nm} \end{aligned}\right. \quad (1 \leqslant m \leqslant n) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

и сферическую функцию представляют так:

$$Y_n = fMa^n \sum_{m=0}^{n} (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_n^m (\cos \vartheta). \tag{20}$$

С учетом последнего получим, наконец, следующие выражения

$$M_n = \frac{fM \cdot a^n \cdot \bar{C}_{nm} \cdot n!}{A_n^m} \sqrt{2n+1}; \quad M_n = \frac{fM \cdot a^n \cdot \bar{S}_{nm} \cdot n!}{B_n^m} \sqrt{2n+1}, \tag{21}$$

позволяющие вычислять моменты сферических функций (или соответствующих гравитационных мультиполей), причем с контролем $(2n+1)$ раз. Кроме того, соотношения (21) и (15) выражают элементарным образом связь между стоксовыми постоянными Земли и параметрами ее гравитационных мультиполей.

Формулы (21) и (15) были использованы при нахождении моментов гравитационных мультиполей Земли, причем стоксовы постоянные $\bar{C}_{nm}$, $\bar{S}_{nm}$ брали из [8], а направляющие косинусы осей мультиполей — по данным статьи [7]. Моменты, естественно, определялись с указанным выше контролем. Ре-

---

* Подобная задача рассматривается в геомагнетизме [9], где выражения типа (18) используются для нахождения координат полюсов геомагнитных мультиполей.

зультаты вычисления моментов гравитационных мультиполей Земли (в единицах $fM \cdot a^n$) приведены ниже:

n	$M_n/(10^7)^n$	n	$M_n/(10^7)^n$	n	$M_n/(10^7)^n$
2	$1761266 \cdot 10^5$	7	$1495 \cdot 10^5$	12	$216 \cdot 10^5$
3	$11280 \cdot 10^5$	8	$876 \cdot 10^5$	13	$198 \cdot 10^5$
4	$5181 \cdot 10^5$	9	$463 \cdot 10^5$	14	$197 \cdot 10^5$
5	$3056 \cdot 10^5$	10	$411 \cdot 10^5$	15	$157 \cdot 10^5$
6	$2146 \cdot 10^5$	11	$297 \cdot 10^5$		

Впервые здесь найденные значения моментов гравитационных мультиполей Земли до 15 порядка, с одной стороны, завершают определение всех $(2n+1)$ параметров для каждого, а с другой — оставляют в силе заключительные замечания статьи [7] о возможной интерпретации полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Перев. с англ. Л., «Иностранная литература», 1952.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., «Высшая школа», 1970.
3. Марченко А. Н. О вычислении элементов октаполя Земли. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1976, № 23.
4. Марченко А. Н. О гравитационном тетраполе Земли. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1976, № 24.
5. Мещеряков Г. А. О нахождении полюсов сферических функций. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1976, № 23.
6. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Об уравнении, определяющем оси сферических функций. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1976, № 24.
7. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Нахождение осей гравитационных мультиполей Земли. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1977, № 25.
8. Стандартная Земля, геодезические параметры Земли на 1966 г. Перев. с англ. М., «Мир», 1969.
9. James R. W. Multipole analysis. I Theory and geomagnetic multipole 1965. 0 — «Australian Jornal of Physics», 1968, v. 21, № 4.
10. James R. W. Transformation of spherical Harmonics Under Change of Reference Frame. — «Geophysical Jornal R. astr. Soc.», 1969, v. 17, № 3.
11. Maxwell G. I. A treatise on Electricity and Magnetism. V. 1, 2-nd edition. Oxford, 1881.

Работа поступила 20 января 1976 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.