УДК 528.21+531.26

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, А. Н. МАРЧЕНКО

НАХОЖДЕНИЕ ОСЕЙ ГРАВИТАЦИОННЫХ МУЛЬТИПОЛЕЙ ЗЕМЛИ

Гравитационный потенциал Земли V обычно представляют, например в работе [6], рядом шаровых функций

$$V=\sum_{n=0}^{\infty} V_n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}, \tag{1}$$

в котором сферические функции Y_n предполагают записанными как линейные комбинации зональных, тессеральных и секториальных гармоник, то есть

$$Y_n=fMa^n \sum_{m=0}^{n} (C_{nm}\cos m\lambda+S_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta), \tag{2}$$

где a — экваториальный радиус Земли; f — гравитационная постоянная; M — масса планеты; r, ϑ, λ — геоцентрические координаты; C_{nm}, S_{nm} — стоксовы постоянные Земли; $P_n^m(\cos\vartheta)$ -- присоединенные функции Лежандра.

Наряду с такой формой записи V в последнее время начинают использовать [1—5, 9] его максвеллово представление [11], уже прочно вошедшее в учение о геомагнетизме [7, 10, 12, и др.]. Согласно Максвеллу, сферическая функция

$$Y_n=(-1)^n\frac{r^{n+1}}{n!}M_n\frac{\partial^n}{\partial h_1\partial h_2\ldots\partial h_n}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{3}$$

в результате каждый член ряда (1)

$$\frac{Y_n}{r^{n+1}}=V_n \tag{4}$$

становится потенциалом V_n мультиполя n-го порядка. В формуле (3) M_n — момент; $\vec{h}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — оси мультиполя или сферической функции; $\frac{\partial}{\partial h_i}$ означает дифференцирование по направлению $\vec{h}_i$. Точку пересечения положительного направления оси $\vec{h}_i$ со сферой называют полюсом функции Y_n или полюсом соответствующего ей мультиполя.

В 1972 г. в ЛПИ начато систематическое изучение гравитационных мультиполей Земли. Описаны мультиполя планеты низших порядков (2-го порядка — квадриполь [3], 3-го — октаполь [1], 4-го — тетраполь [2]) и рассмотрена методика определения их параметров [4, 5]. Рассмотрим развитие построений статьи [5], приводящее к довольно простому алгоритму вычисления положения осей гравитационных мультиполей Земли произвольного порядка. В качестве примера даются впервые рассчитанные полюсы таких мультиполей до 15 порядка включительно. Заметим, что существующие в геомагнетизме решения этой задачи доведены — насколько нам известно — пока только до 8-го порядка [10] и являются сложными в практической реализации.

В работе [5] показано, что с использованием в качестве исходной информации представления сферических функций по Гауссу—Лежандру [2] отыскание их полюсов, а значит и полюсов гравитационных мультиполей, сводится к решению алгебраического уравнения степени $2n$

$$\sum_{m=0}^{n} \Phi_n^m \left(C_{nm} \sum_{k=0}^{n} Q_k u^{2k} + S_{nm} \sum_{k=0}^{n-1} R_k u^{2k+1} \right) = 0, \qquad (5)$$

в котором

$$Q_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-m}{k-j} \cdot F_j; \quad R_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-m}{k-j} \cdot H_j, \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} H_j &= (-1)^j \sum_{t=0}^{j} \binom{m}{2t+1} \cdot \binom{m-(2t+1)}{j-t} \cdot 2^{2t+1} \, (0 \leqslant j \leqslant n-1); \\ F_j &= (-1)^j \sum_{t=0}^{j} \binom{m}{2t} \cdot \binom{m-2t}{j-t} \cdot 2^{2t} \, (0 \leqslant j \leqslant n), \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\Phi_n^m = \frac{(2n)!}{2^n n! (n-m)!} \, i^{n-m} \quad (i = \sqrt{-1}), \qquad (8)$$

а $\binom{p}{q}$ — биноминальные коэффициенты, вычисленные по известной формуле

$$\binom{p}{q} = C_p^q = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}{q!}. \qquad (9)$$

Для нахождения корней уравнения (5) удобнее, однако, последнее представлять в общем виде

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \ldots + a_{2n-1} u^{2n-1} + a_{2n} u^{2n} = 0. \qquad (10)$$

Коэффициенты этого уравнения при решении конкретной обсуждаемой задачи легко получить из следующей матрицы

$$D=\begin{pmatrix} D^{n}_{0,0}\,D^{n}_{0,1}\,D^{n}_{0,2}\ \ldots\ D^{n}_{0,2n} \\ D^{n}_{1,0}\,D^{n}_{1,1}\,D^{n}_{1,2}\ \ldots\ D^{n}_{1,2n} \\ D^{n}_{2,0}\,D^{n}_{2,1}\,D^{n}_{2,2}\ \ldots\ D^{n}_{2,2n} \\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ D^{n}_{n,0}D^{n}_{n,1}D^{n}_{n,2}\ \ldots\ D^{n}_{n,2n} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

элементы которой

$$D^{n}_{m,2k}=\Phi^{m}_{n}\,C_{nm}Q_{k}\ (0\leqslant k\leqslant n);$$

$$D^{n}_{m,2k+1}=\Phi^{m}_{n}\,S_{nm}R_{k}\ (0\leqslant k\leqslant n-1). \tag{12}$$

Отметим свойства матрицы D: ее элементы $D^{n}_{m,l}$ принимают построчно действительные или комплексные значения, в зависимости от того, четно или нечетно $(n-m)$, см. выражения (8) и (12); суммы элементов $D^{n}_{m,l}$ по столбцам выражают коэффициенты уравнения (10).

С учетом последнего просто составляют комплексные коэффициенты алгебраического уравнения (10)

$$a_{j}=\sum_{m=0}^{n} D^{n}_{m,j}\ (0\leqslant j\leqslant 2n). \tag{13}$$

Найдя таким образом величины a_j и вычислив корни уравнения одним из стандартных методов (например, методом Мюллера), легко определить величины A, B, C, пропорциональные направляющим косинусам осей сферической функции из рассмотрения одного из детерминантов следующего вида:

$$A\xi+B\eta+C\zeta=\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha_1' + i\beta_1' & \alpha_2' + i\beta_2' & i \\ -\alpha_1'' + i\beta_1'' & -\alpha_2'' + i\beta_2'' & i \end{vmatrix}=0, \tag{14}$$

или

$$A\xi+B\eta+C\zeta=\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha_1' + i\beta_1' & \alpha_2' + i\beta_2' & i \\ \alpha_1'' - i\beta_1'' & \alpha_2'' - i\beta_2'' & -i \end{vmatrix}=0 \tag{15}$$

где $$\alpha_1^{(k)}+i\beta_1^{(k)}=\frac{1-u_k^2}{1+u_k^2};\quad \alpha_2^{(k)}+i\beta_2^{(k)}=\frac{2u_k}{1+u_k^2},\tag{16}$$

а u_k — вычисленный корень уравнения (10). В соотношениях (14) и (15) α' и β' соответствуют одному из корней уравнения (10), α'' и β'' — другому его корню. В паре эти корни определяют плоскость, перпендикуляр к которой совпадает с осью сферической функции или искомого мультиполя. При этом n пар корней определяют n осей сферической функции Y_n. Разбивку корней на пары производят после вычисления соответствующих каждому корню величин вида $\alpha_1+i\beta_1$ и $\alpha_2+i\beta_2$ простым их перебором, в результате чего и составляют детерминант типа (14) или (15), а значит и определяют величины A, B, C: так для выражения (14)

$$A=\alpha_2;\quad B=-\alpha_1;\quad C=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1,\tag{17}$$

а для (15)

$$A=-\alpha_2;\quad B=\alpha_1;\quad C=\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2.\tag{18}$$

Теперь по формулам, приведенным в работе [4],

$$\cos\vartheta_i=c_i;\quad \operatorname{tg}\lambda_i=\frac{b_i}{a_i},\tag{19}$$

где $$a_i=\frac{A_i}{\mu_i};\quad b_i=\frac{B_i}{\mu_i};\quad c_i=\frac{C_i}{\mu_i};\quad \mu_i=\sqrt{A_i^2+B_i^2+C_i^2},\tag{20}$$

находим, наконец, координаты полюсов сферических функций (или гравитационных мультиполей Земли).

Таким образом, формулы (6)—(8), (12), (13), (17)—(20) описывают практическое решение задачи, допуская эффективную его реализацию на ЭВМ благодаря простоте и обозримости предлагаемого здесь алгоритма.

С использованием в качестве исходных данных полного набора стоксовых постоянных «Стандартной Земли 1» [6] на основании этого алгоритма были вычислены координаты полюсов (и их антиподных точек) гравитационных мультиполей планеты до 15 порядка (см. таблицу).

Полученные для каждого мультиполя $2n$ параметров описывают его потенциал V_n с точностью до постоянного множителя. Констатация последнего эквивалентна вычислению момента мультиполя, которое дало бы возможность завершить отыскание всех $(2n+1)$-го параметров мультиполей. Мы не касаемся обсуждения полученных результатов, например интерпретации основных особенностей геоида наличием гравитационных квадриполя и октаполя планеты с их конкретно най-

Координаты полюсов гравитационных мультиполей Земли (в градусах)

n	Координаты полюсов мультиполей (и их антиподных точек) ϑ	λ
1	2	3
2	4,63 (175,37)	165,22 (345,22)
	175,37 (4,63)	165,22 (345,22)
3	36,52 (143,48)	115,57 (295,57)
	58,68 (121,32)	288,41 (108,41)
	71,91 (108,09)	21,24 (201,24)
4	11,49 (168,51)	97,55 (277,55)
	58,84 (121,16)	324,19 (144,19)
	71,80 (108,20)	238,21 (58,21)
	74,90 (105,10)	142,44 (322,44)
5	39,79 (140,21)	123,77 (303,77)
	42,12 (137,88)	342,40 (162,40)
	66,06 (113,94)	197,62 (17,62)
	79,35 (100,65)	227,53 (47,53)
	83,32 (96,68)	116,49 (296,49)
6	11,22 (168,78)	33,60 (213,60)
	37,55 (142,45)	330,44 (150,44)
	71,44 (108,56)	242,08 (62,08)
	75,30 (104,70)	77,34 (257,34)
	85,89 (94,11)	126,27 (306,27)
	93,50 (86,50)	173,14 (353,14)
7	11,67 (168,33)	247,86 (67,86)
	41,94 (138,06)	254,46 (74,46)
	46,19 (133,81)	168,32 (348,32)
	46,21 (133,79)	74,22 (254,22)
	70,45 (109,55)	0,82 (180,82)
	73,16 (106,84)	307,34 (127,34)
	83,97 (96,03)	67,60 (247,60)
8	21,66 (158,34)	127,97 (307,97)
	30,93 (149,07)	310,67 (130,67)
	63,09 (116,91)	232,08 (52,08)
	65,24 (114,76)	39,57 (219,57)
	78,04 (101,96)	341,61 (161,61)
	86,21 (93,79)	1,49 (181,49)
	87,12 (92,88)	257,30 (77,30)
	88,01 (91,99)	299,84 (119,84)
9	20,52 (159,48)	20,14 (200,14)
	42,66 (137,34)	70,41 (250,41)
	44,30 (135,70)	308,25 (128,25)
	57,11 (122,89)	90,57 (270,57)
	58,19 (121,81)	210,01 (30,01)
	64,21 (115,79)	255,47 (75,47)
	67,92 (112,08)	139,24 (319,24)
	76,90 (103,10)	29,42 (209,42)
	88,78 (91,22)	343,07 (163,07)

n	Координаты полюсов мультиполей (и их антиподных точек) ϑ	λ
4	5	6
11	61,84 (118,16)	223,36 (43,36)
	74,82 (105,18)	278,57 (98,57)
	79,29 (100,71)	306,61 (126,61)
	81,78 (98,22)	351,83 (171,83)
	82,76 (97,24)	25,26 (205,26)
12	6,30 (173,70)	23,64 (203,64)
	35,82 (144,18)	309,56 (129,56)
	41,25 (138,75)	133,65 (313,65)
	43,31 (136,69)	47,92 (227,92)
	51,31 (128,69)	6,85 (186,85)
	53,73 (126,27)	148,87 (328,87)
	53,87 (126,13)	227,69 (47,69)
	62,26 (117,74)	92,13 (272,13)
	62,93 (117,07)	272,23 (92,23)
	72,68 (107,32)	205,42 (25,42)
	74,59 (105,41)	329,35 (149,35)
	76,53 (103,47)	227,68 (47,68)
13	18,06 (161,94)	75,85 (255,85)
	38,41 (141,59)	149,79 (329,79)
	40,05 (139,95)	334,96 (154,96)
	43,26 (136,74)	274,33 (94,33)
	49,09 (130,91)	350,73 (170,73)
	56,45 (123,55)	206,05 (26,05)
	62,00 (118,00)	89,37 (269,37)
	64,65 (115,35)	222,33 (42,33)
	71,64 (108,36)	157,08 (337,08)
	75,69 (104,31)	16,75 (196,75)
	79,42 (100,58)	51,07 (231,07)
	82,04 (97,96)	127,57 (307,57)
	84,09 (95,91)	284,11 (104,11)
14	18,86 (161,14)	33,61 (213,61)
	19,52 (160,48)	156,74 (336,74)
	35,06 (144,94)	63,79 (243,79)
	42,75 (137,25)	322,49 (142,49)
	51,88 (128,12)	224,64 (44,64)
	57,71 (122,29)	268,51 (88,51)
	59,28 (120,72)	251,20 (71,20)
	59,82 (120,18)	160,38 (340,38)
	63,77 (116,23)	331,31 (151,31)
	70,00 (110,00)	65,93 (245,93)
	74,07 (105,93)	92,79 (272,79)
	77,31 (102,69)	127,43 (307,43)
	86,92 (93,08)	359,93 (179,93)
	91,80 (88,20)	214,67 (34,67)

Продолжение табл.

1	2	3	4	5	6
10	18,91 (161,09)	356,77 (176,77)	15	8,73 (171,27)	270,24 (90,24)
	29,85 (150,15)	295,88 (115,88)		26,05 (153,95)	120,07 (300,07)
	29,98 (150,02)	68,04 (248,04)		29,25 (150,75)	28,40 (208,40)
	50,36 (129,64)	155,74 (335,74)		39,92 (140,08)	12,83 (192,83)
	53,11 (126,89)	242,39 (62,39)		41,65 (138,35)	144,56 (324,56)
	53,34 (126,66)	96,85 (276,85)		51,32 (128,68)	299,50 (119,50)
	55,95 (124,05)	43,44 (223,44)		55,37 (124,63)	235,36 (55,36)
	71,73 (108,27)	303,51 (123,51)		63,31 (116,69)	171,48 (351,48)
	75,44 (104,56)	346,70 (166,70)		68,47 (111,53)	80,41 (260,41)
	82,81 (97,19)	216,98 (36,98)		75,65 (104,35)	42,40 (222,40)
				77,88 (102,12)	322,93 (142,93)
				82,17 (97,83)	227,28 (47,28)
11	31,94 (148,06)	251,95 (71,95)		86,17 (93,83)	182,65 (2,65)
	38,08 (141,92)	142,39 (322,39)		86,59 (93,41)	139,60 (319,60)
	45,77 (134,23)	40,23 (220,23)		91,89 (88,10)	88,85 (268,85)
	49,26 (130,74)	88,99 (268,99)			
	49,96 (130,04)	328,63 (148,63)			
	55,60 (124,40)	153,12 (333,12)			

денными параметрами. Но все же отметим, что найденный пучок прямых представляет собой инвариантный геометрический образ, характеризующий гравитационное поле планеты. Кроме того, — и это главное — благодаря методике вычисления осей сферических функций, описанной выше, впервые удалось получить координаты полюсов гравитационных мультиполей планеты довольно высоких порядков * (до $n=15$) и практически преодолеть, наконец, указанные рядом авторов [7, 8, 9, 10 и др.], различные трудности в решении обсуждаемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко А. Н. О вычислении элементов октаполя Земли. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1976, № 23.
2. Марченко А. Н. О гравитационном тетраполе Земли. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1976, № 24.
3. Мещеряков Г. А. О мультипольном представлении гравитационного потенциала. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, № 19.
4. Мещеряков Г. А. О нахождении полюсов сферических функций. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1976, № 23.
5. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Об уравнении, определяющем оси сферических функций. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1976, № 24.
6. Стандартная Земля, геодезические параметры Земли на 1966 г. Перев. с англ. М., «Мир», 1969.
7. Умов Н. А. Построение геометрического образа потенциала Гаусса как прием изыскания законов земного магнетизма. Избранные сочинения. М.—Л., ГИТТО, 1950.

* Практическая апробация предлагаемой методики была выполнена также на примере вычисления осей магнитных мультиполей Земли до 8-го порядка; результаты вычислений, естественно, совпали с выводами работы [10].

8. Groten E. On the spherical harmonics series of the geopotential at the Earth's surface. — «Bull. geodesique», 1968, № 88.
9. Hotin M. Mathematical Geodesy. Washington D. C., 1969.
10. James R. W. Multipole analysist. I. Theory and geomagnetic multipole 1965. 0. — «Australian Jornal of Physic», 1968, v. 21, № 4.
11. Maxwell G. I. A treatise on Electricity and Magnetism. V. 1, 2-nd edition. Oxford, 1881.
12. Winch D. E., Slausitajs L. Geomagnetice Multipoles, 1965. 0. Pure and Applied geophysics, 1966, v. 65.

Работа поступила 20 января 1976 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.