

$$f^T = (1, 0, 0, -1, -1, 1, 0),$$

$$f^T A = (0, 0, 0, 1),$$

$$f^T A (A^T A)^{-1} = \frac{1}{12} (3, 2, 3, 17),$$

$$f^T A (A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{12} (1, -1, 5, -2, -2, 12, 5),$$

$$\frac{1}{P_{c_s}} f^T A (A^T A)^{-1} A^T f = \frac{17}{12}.$$

Условные уравнения в коррелятном методе:

$$(1) + (2) + W_1 = 0,$$

$$(3) - (7) + W_2 = 0,$$

$$(2) + (4) + (5) + (7) + W_3 = 0.$$

Матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (AA^T)^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$f^T = (0010000), \quad f^T f = 1$$

$$f^T A^T = (010),$$

$$f^T A^T (AA^T)^{-1} = \frac{1}{12} (-1, 7, 2),$$

$$f^T A^T (AA^T)^{-1} A = \frac{1}{12} (1, 3, 7, 2, 2, 0, -5),$$

$$f^T A^T (AA^T)^{-1} A f = \frac{7}{12},$$

$$\frac{1}{P_{c_s}} = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

$$f^T = (1, 0, 0, -1, -1, 1, 0), \quad f^T f = 4,$$

$$f^T A^T = (1, 0, -2),$$

$$f^T A^T (AA^T)^{-1} = \frac{1}{12} (11, -5, -10),$$

$$f^T A^T (AA^T)^{-1} A = \frac{1}{12} (11, 1, -5, -10, -10, 0, -5),$$

$$f^T A^T (AA^T)^{-1} A f = \frac{31}{12},$$

$$\frac{1}{P_{c_s}} = 4 - \frac{31}{12} = \frac{17}{12}.$$

Обратные веса всех уравненных элементов в обоих примерах сведены в таблицу.

Отметим, что формула (2) пригодна для оценки любой функции уравненных элементов. Если в ней принять

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_x = \frac{\partial F}{\partial l} A = fA,$$

то получим формулу Могильного. Последняя удобна при вычислении веса по схеме Гаусса.

Список литературы: 1. *Большаков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезических измерений. — М.: Недра, 1977. 2. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. — М.: Госиздат физ.-мат. литературы, 1958. 3. *Машимов М. М.* Уравнивание геодезических сетей. — М.: Недра, 1979. 4. *Папазов М. Г., Могильный С. Г.* Теория ошибок и способ наименьших квадратов. — М.: Недра, 1968.

Статья поступила в редколлегию 25.02.82

Обратные веса уравненных углов и сторон

Углы	Сеть 1		Сеть 2	
	Коррелятивный	Параметрич.	Коррелятивный	Параметрический
1	1:3	1:3	5:12	5:12
2	1:3	1:3	5:12	5:12
3	1:3	1:3	5:12	5:12
4	1:3	1:3	2:3	2:3
5	1:3	1:3	2:3	2:3
6	1:3	1:3	1	1
7			5:12	5:12
Стороны				
C <sub>1</sub>	1:9	1:9	7:8	7:8
C <sub>2</sub>	1:9	1:9	5:24	5:24
C <sub>3</sub>	1:9	1:9	17:24	17:24
C <sub>4</sub>			5:24	5:24
C <sub>5</sub>			5:24	5:24
C <sub>6</sub>			3:4	3:4

УДК 528.024.4

С. А. ОСТРОВСКАЯ

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ НА МАЛЫЕ РАССТОЯНИЯ С УЧЕТОМ РЕФРАКЦИИ МЕТОДОМ РЕФРАКЦИОННОГО БАЗИСА

Тригонометрическое нивелирование является ускоренным методом определения высот точек местности по сравнению с методом геометрического нивелирования. Основной причиной ограниченного применения его, особенно при крупномасштабных съемках, ко-

гда требуется высокая точность определения превышений и отметок, продолжает оставаться вертикальная рефракция.

В последние годы появился ряд предложений, направленных на устранение указанного недостатка, например одновременным или почти одновременным взаимным тригонометрическим нивелированием [3, 6]. Хотя частные углы рефракции при этом не одинаковы по абсолютной величине, но, как правило, они противоположные по знаку. Поэтому влияние рефракции обычно значительно компенсируется. Действительно, при нивелировании на малые расстояния днем из-за небольшой высоты луча над подстилающей поверхностью и значительного понижения температуры воздуха с высотой в приземном воздушном слое (сверхадиабатические вертикальные градиенты температуры) световая кривая между точками  $T_1$  и  $T_2$ , в которых установлены теодолиты (рис. 1), повернута своей выпуклостью вниз. Неискаженные рефракцией вертикальные углы наклона  $+\alpha_1$  и  $-\alpha_2$ . Фактически измеренные, искаженные рефракцией углы будут  $+\alpha'_1$  и  $-\alpha'_2$ . Частные углы рефракции  $\delta_A$  и  $\delta_B$ . При этом, как видно из рисунка,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha'_1 + \delta_A \\ \alpha_2 &= \alpha'_2 - \delta_B \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если предположить, что  $|\delta_A| = |\delta_B|$ , тогда действительно средний из взаимных измерений угол наклона  $\alpha$  будет свободным от влияния рефракции

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\alpha'_1 + \delta_A + \alpha'_2 - \delta_B}{2} = \frac{\alpha'_1 + \alpha'_2}{2} \quad (2)$$

Однако обычно  $|\delta_A| \neq |\delta_B|$ . Исключение составляют симметричные профили местности при однородной подстилающей поверхности, а также короткие периоды спокойных изображений [2] при равновесной атмосфере (вертикальный адиабатический градиент температуры  $\gamma = 0,0098^\circ \text{C/м}$ ). Тем не менее при взаимных наблюдениях действие рефракции значительно компенсируется и на измеренные превышения оказывает влияние только разностная, дифференциальная часть рефракции.

В то же время при одностороннем тригонометрическом нивелировании действие рефракции вносит существенные погрешности и с этим действием нельзя не считаться.

Цель этой статьи — показать, с какой точностью можно производить одностороннее тригонометрическое нивелирование на малые расстояния (до 1 км), если вести учет вертикальной рефракции методом рефракционного базиса [5].

Кратко изложим сущность метода. При одновременном измерении вертикальных углов по нескольким направлениям, выходящим с пункта  $A$  (рис. 2), изменение рефракции во времени практически исключается. Если вертикальная рефракция сказывается по-разному в различных направлениях, то преимущественно потому, что: 1) эквивалентная высота прохождения светового луча по каждому направлению различна; 2) неодинаковая подстилающая

поверхность по направлениям. Второй фактор при этом методе не учитывается.

В таком случае зависимость коэффициентов (углов) рефракции между различными направлениями можно выразить следующими формулами:

$$K_i = K_{нА} + (K_A - K_{нА}) \frac{h_{эА-B}}{h_{эА-i}}, \quad (3)$$

$$\delta_i = \delta_{нА} + (\delta_A - \delta_{нА}) \frac{h_{эА-B}}{h_{эА-i}} \cdot \frac{S_{A-i}}{S_{A-B}}. \quad (4)$$

Здесь  $K_i(\delta_i)$  — коэффициент (угол) рефракции по любому направлению;  $K_A(\delta_A)$  — коэффициент (угол) по направлению ре-

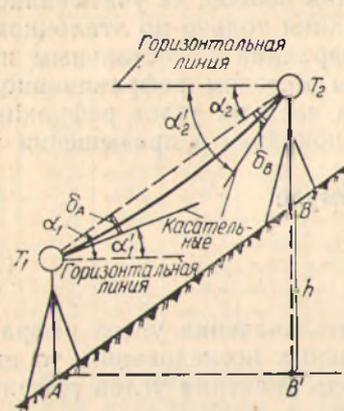


Рис. 1. К объяснению частичной компенсации рефракции из взаимных измерений вертикальных углов.

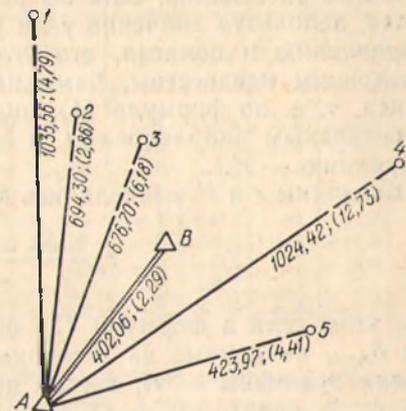


Рис. 2. Схема экспериментальной сети.

фракционного базиса  $A-B$ . При этом  $K_A$  или  $\delta_A$  определяются на основании того, что отметки точек  $A$  и  $B$  известны из геометрического нивелирования. Отметки остальных точек — 1, 2, 3...  $i$  определяются;  $h_{эА-B}$ ,  $h_{эА-i}$  — эквивалентные высоты по эталонному и по остальным направлениям;  $S_{A-B}$ ,  $S_{A-i}$  — длины сторон этих же направлений;  $K_{нА}$ ,  $K_{нi}$  — нормальные значения рефракции по направлению рефракционного базиса (эталонному) и по остальным направлениям.

При этом [4]

$$K_{н} = 16,32 \frac{P}{T^2}; \quad (5)$$

$$\delta_{н} = 264,18 \frac{P}{T^2} \cdot S_{(км)}. \quad (6)$$

где  $P$  — давление,  $T$  — абсолютная температура воздуха. Достаточно знать  $P$  и  $T$  у инструмента.

Основой для решения задачи, поставленной в статье, послужили экспериментальные исследования М. К. Дрока [1]. Они велись по шести направлениям, длины которых показаны на рис. 2. В круглых скобках на этом же рисунке показаны эквивалентные высоты  $h_3$  направлений. Так как фактически были известны отметки из геометрического нивелирования III класса всех семи точек экспериментальной сети, то это позволило найти коэффициенты (углы) рефракции по всем направлениям достаточно точно со средними квадратическими погрешностями не более  $m_K = \pm 0,01$ ;  $m_3 = +1,5''$ .

Таким образом, по этим данным можно найти ошибки в превышениях за рефракцию —  $r$ . Величины  $r$  будут характеризовать погрешности одностороннего тригонометрического нивелирования на малые расстояния, если бы рефракция вообще не учитывалась. Далее, используя значение угла рефракции только по эталонному направлению и полагая, что углы рефракции по остальным направлениям неизвестны, нами найдены методом рефракционного базиса, т. е. по формуле (4), значения частных углов рефракции по остальным направлениям, а затем поправки в превышения за рефракцию —  $r'$ .

Величины  $r$  и  $r'$  вычислялись по формуле

$$r_i = \frac{S_{A-i} \cdot \delta_{A-i}}{\rho} \quad (7)$$

При этом если в формулу (7) поставить значения углов рефракции  $\delta_{A-i}$ , найденные из экспериментальных исследований, то вычислим величины —  $r_i$ ; а если поставить значения углов рефракции  $\delta'_{A-i}$ , найденные методом рефракционного базиса, то вычислим —  $r'_i$ . Разности

$$\Delta r_i = r_i - r'_i \quad (8)$$

будут по существу характеризовать точность тригонометрического нивелирования на малые расстояния с учетом рефракции методом рефракционного базиса.

Укажем еще, что М. К. Дрок [1] производил измерения вертикальных углов теодолитом ОТ—02 в течение дня через каждый час двумя приемами на верхнюю, среднюю и нижнюю визирные марки, укрепленные на трехметровой вехе. Нами использованы наблюдения только на среднюю марку. Высоты инструмента и средних марок над землей составляли около 1,5 м. Обработаны только измерения, выполненные с 10 до 18 ч, т. е. во время, рекомендованное А. А. Изотовым и Л. П. Пеллиным для тригонометрического нивелирования [4]. Действительно, в этот период рефракция наиболее стабильна и ее изменения происходят только по модулю с сохранением знака. В использованных экспериментальных данных исключением из этого правила (как видно из табл. 1) были только три случая — для направления А—4 с самой большой эквивалентной высотой, для которого углы рефракции днем вообще близки к нулю.

В табл. 1 приведены средние из 12 дней наблюдений почасовые значения углов рефракции и поправок за рефракцию —  $r$ . Так как в каждый час выполнялось два приема измерений, то каждое значение угла рефракции и поправок  $r_i$  получено из 24 приемов измерений. Поэтому погрешности инструментального характера в этих результатах значительно ослаблены.

Анализируя табл. 1, замечаем доминирующую зависимость рефракции (углов  $\delta_{A-i}$  и величин  $r$ ) от эквивалентных высот.

Таблица 1

Значения углов рефракции —  $\delta_{A-i}$  и поправок за рефракцию —  $r_i$ .

Время	Направления											
	А—В		А—1		А—2		А—3		А—4		А—5	
	$\delta'_{A-B}$	$r_{мм}$	$\delta'_{A-1}$	$r_{мм}$	$\delta'_{A-2}$	$r_{мм}$	$\delta'_{A-3}$	$r_{мм}$	$\delta'_{A-4}$	$r_{мм}$	$\delta'_{A-5}$	$r_{мм}$
10	-6,6	-13	-5,4	-27	-8,5	-29	-1,3	-4	-0,8	-4	-3,0	-6
11	-8,0	-16	-6,2	-31	-9,8	-33	-1,8	-6	-0,8	-4	-4,1	-8
12	-9,3	-18	-5,4	-27	-11,4	-38	-2,9	-9	-0,8	-4	-3,3	-7
13	-7,3	-14	-6,4	-32	-2,0	-40	-2,8	-9	-0,8	-4	-4,7	-10
14	-6,5	-13	-4,5	-22	-10,6	-36	-0,4	-1	-0,2	-1	-4,2	-9
15	-5,8	-11	-5,5	-28	-10,4	-35	-2,7	-9	+0,3	+1	-4,1	-8
16	-6,8	-13	-4,9	-25	-10,2	-34	-1,6	-4	-0,5	-2	-4,4	-9
17	-6,3	-12	-4,4	-22	-7,6	-25	-2,1	-7	+0,7	+2	-2,4	-5
	-2,7	-5	-1,2	-6	-5,1	-17	-0,8	-3	+1,3	+4	-1,7	-3

Так, для направления 2 ( $h_3=2,86$ ) действие рефракции больше, чем для направления 1 ( $h_3=4,79$ ), хотя длина линии А—1 значительно больше, чем А—2. Действие рефракции носит систематический характер. Однако, чтобы обобщенно оценить это действие, найдем на основании табл. 2, полагая, что  $r_i$  — истинные погрешности, среднюю квадратическую погрешность действия рефракции —  $m$  при одностороннем тригонометрическом нивелировании

$$m = \pm \sqrt{\frac{[rr]}{n}} \quad (9)$$

Вычисления дают  $m = \pm 18,2$  мм. Средняя длина стороны из шести направлений  $S_{ср.} = 710$  м. Так как

$$m = m_{км} \cdot \sqrt{S_{ср.}} \quad (10)$$

то в пересчете на длину линии, равную 1 км, получим:

$$m_{км} = \pm 21,6 \text{ мм.}$$

Мы придаем большое значение полученной величине, так как она найдена из обширных, хорошо поставленных экспериментальных исследований и достаточно точно отображает влияние вертикальной рефракции на малые расстояния при низком прохождении визирного луча. В табл. 2 приведены значения углов рефракции —  $\delta'_{A-i}$ , вычисленные методом рефракционного базиса,

Величины углов рефракции, вычисленные методом рефракционного базиса  $\delta_{A-i}$ , поправки за рефракцию  $-r'_i$ .

Таблица 2

Время	Направления									
	А-1		А-2		А-3		А-4		А-5	
	$\delta'_{A-1}$	$r'_{mm}$	$\delta'_{A-2}$	$r'_{mm}$	$\delta'_{A-3}$	$r'_{mm}$	$\delta'_{A-4}$	$r'_{mm}$	$\delta'_{A-5}$	$r'_{mm}$
10	-8,2	-41	-8,6	-29	-2,7	-9	-0,3	-1	-2,9	-6
11	-10,3	-52	-10,6	-36	-3,6	-12	-0,9	-4	-3,7	-8
12	-12,2	-61	-12,4	-42	-4,4	-14	-1,5	-7	-4,4	-9
13	-9,3	-47	-9,6	-32	-3,2	-10	-0,6	-3	-3,3	-7
14	-8,1	-41	-8,6	-29	-2,3	-8	-0,3	-1	-2,9	-6
15	-7,1	-36	-7,6	-26	-2,2	-7	-0,1	0	-2,5	-5
16	-8,6	-43	-9,0	-30	-2,9	-10	-0,4	-2	-3,1	-6
17	-7,8	-39	-8,3	-28	-2,6	-9	-0,2	-1	-2,8	-6
18	-2,6	-13	-3,3	-11	-0,3	-1	-1,5	-7	-0,8	-2

Погрешности тригонометрического нивелирования при учете рефракции методом рефракционного базиса  $-\Delta r_i$ .

Таблица 3

Время	Направления				
	А-1	А-2	А-3	А-4	А-5
	$\Delta r_{mm}$				
10	+14	0	+5	-3	0
11	+21	+3	+6	0	0
12	+34	+4	+5	+3	+2
13	+15	-8	+1	-1	-3
14	+19	-7	+7	0	-3
15	+8	-9	-2	-1	-3
16	+18	-4	+6	0	-3
17	+17	+3	+2	-1	+1
18	+7	+6	-2	+3	-1

Для обобщенной оценки остаточного действия рефракции вычислим на основании табл. 3 (по величинам  $\Delta r_i$ ) среднюю квадратическую погрешность этого остаточного влияния  $-m'$

$$m' = \pm \sqrt{\frac{[\Delta r \Delta r]}{n'}} \quad (11)$$

Оказалось:  $m' = \pm 9$  мм ( $n=54$ ,  $n'=45$ ). Средняя длина пяти сторон сети (без направления А-В) составляет 771 м. В пересчете на 1 км получим  $m'_{км} = \pm 10,3$  мм.

Таким образом: 1) при одностороннем тригонометрическом нивелировании на малые расстояния (до 1 км) учет вертикальной рефракции методом рефракционного базиса уменьшает ее действие не менее чем в два раза;

2) одностороннее тригонометрическое нивелирование высокоточными теодолитами на расстояния до 1 км, если вести учет рефракции методом рефракционного базиса, не уступает по точности геометрическому нивелированию IV класса;

3) при таком учете рефракции нивелирование можно вести не только в периоды утренних и вечерних спокойных изображений, а в течение всего дня между этими периодами.

Список литературы: 1. Дрок М. К. К вопросу о поправке в превышения за совместное влияние кривизны Земли и вертикальной рефракции при геодезическом нивелировании на малые расстояния. — Науч. зап. Львовского политех. ин-та. Сер. геод., 1962, вып. 82, № 7. 2. Джуман Б. М. О точности измерения зенитных расстояний в период спокойных изображений при ветре. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1966, вып. 4. 3. Замираев Н. Н., Богданов Б. Г. Из опыта создания высотного обоснования методом тригонометрического нивелирования. — Геодезия и картография, 1981, № 10. 4. Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследования земной рефракции и методов геодезического нивелирования. — Тр. ЦНИИГАиК, 1955, вып. 102. 5. Маслич Д. И., Джуман Б. М., Глушак Б. Т., Алексеев А. В. Об учете вертикальной рефракции над морской поверхностью по методу эталонного направления. — V Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере. Тезисы докладов. Ч. 2. Томск, 1979. 6. Шевчук П. М., Гнатенко А. Д., Кравецкий В. Н. Точность превышений из тригонометрического нивелирования коротким путем. — Геодезия и картография, 1981, № 3.

Статья поступила в редколлегию 15.04.82

УДК 528.089.6

А. Л. ОСТРОВСКИЙ, И. Н. КМЕТКО, В. О. ЛИТИНСКИЙ

## К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРАВИЛЬНОСТИ ХОДА ФОКУСИРУЮЩЕЙ ЛИНЗЫ ВЫСОКОТОЧНЫХ НИВЕЛИРОВ

Анализируя исследования правильности хода фокусирующей линзы нивелиров по литературным источникам [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и др.] нельзя не обратить внимание на то, что у всех авторов методика его выполнения, обработка результатов и, главное, критерии оценки правильности хода различные.

В учебнике [1] изложена теория вопроса и приведен численный пример. Исследование предлагается выполнять, разбивая точки по полуокружности радиуса 50 м. Расстояния точек 1, 2, 3... от точки К равны 10, 20, 30... 100 м (рис. 1).

В численном примере обработка результатов измерений ведется по способу наименьших квадратов. Свободными членами служат разности отсчетов на одни и те же точки из станций А и К.

Критерием однообразности хода (колебания) фокусирующей линзы служит средняя квадратическая погрешность  $m$ , а отклонение линии визирования от визирной оси оценивается по углу между ними.

В инструкции [2] это же исследование представлено аналогично, однако свободными членами уравнений поправок здесь служит разности между средним и отдельными значениями горизонта ин-