УДК 528.21/22

И. Ф. МОНИН

ОБ АНАЛОГАХ ФОРМУЛЫ СТОКСА, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ФИГУРУ ГЕОИДА

Формула Стокса, как известно, определяет высоту регуляризированного геоида над земным эллипсоидом по смешанным аномалиям силы тяжести. В работах [1, 2, 3] предложены аналоги формулы Стокса, в которых высоту регуляризированного геоида относительно земного эллипсоида находят по вертикальным градиентам смешанных аномалий силы тяжести, а также по смешанным аномалиям силы тяжести и их вертикальным градиентам. Приводим наиболее простой вывод этих формул и результаты вычислений высот геоида для теоретической модели, подходящей к геоиду Земли. Напишем известные [4] соотношения:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho}+\frac{2T}{\rho}=-\Delta g+\frac{2C}{\rho}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho}-\frac{2T}{\rho^2}=-\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}-\frac{2C}{\rho^2}; \tag{2}$$

$$T=\sum_0^\infty\left(\frac{a}{\rho}\right)^{n+1}T_n; \tag{3}$$

$$\Delta g=\sum_0^\infty \Delta g_n,\quad \frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}=\sum_0^\infty\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_n, \tag{4}$$

где T — возмущающий гравитационный потенциал Земли; Δg — смешанная аномалия силы тяжести; $C=W_0-V_0$; W_0, V_0 — гравитационные потенциалы Земли на геоиде и уровенного земного эллипсоида на его поверхности; ρ — расстояние от центра эллипсоида до поверхности геоида; a — большая полуось двухосного земного эллипсоида; T_n, Δg_n, $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_n$ — сферические функции n-го порядка в разложении возмущающего потенциала, аномалии силы тяжести и ее вертикального градиента.

Подставляя формулу (3) в (1), (2) и учитывая (4), получаем

$$T_0=-a\Delta g_0+2C, \quad (n-1)T_n=a\Delta g_n; \tag{5}$$

$$2T_0=a^2\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0+2C, \quad (n-1)(n+2)T_n=-a^2\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_n; \tag{6}$$

$$a\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_n=-(n+2)\Delta g_n. \tag{7}$$

Из соотношений (6) и (5) находим

$$T_0=a\Delta g_0+a^2\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0; \quad (n^2-1)T_n=-a\Delta g_n-a^2\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_n.$$

Следовательно,

$$T=\sum_0^\infty T_n=a\Delta g_0+a^2\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0-\sum_2^\infty \frac{a\Delta g_n+a^2\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_n}{n^2-1}. \tag{8}$$

Применяя к выражению (8) теорему восстановления сферических функций

$$R=\sum_0^\infty R_n; \quad R_n=\frac{2n+1}{4\pi}\int RP_n(\cos\psi)\,d\sigma,$$

где R_n — произвольная сферическая функция n-го порядка, заданная на сфере; $P_n(\cos\psi)$ — полином Лежандра; ψ — угловое расстояние между текущей и фиксированной точками на сфере; $d\sigma$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса, получаем

$$T=\frac{1}{4\pi}\int\left(a\Delta g+a^2\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)d\sigma-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\left(a\Delta g+a^2\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)\sum_2^\infty \frac{2n+1}{n^2-1}P_n(\cos\psi)\,d\sigma. \tag{9}$$

Просуммируем ряд полиномов Лежандра:

$$F(\psi)=\sum_{2}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2-1}P_n(\cos\psi)=\frac{3}{2}\sum_{2}^{\infty}\frac{P_n}{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}\frac{P_n}{n+1}.$$

Воспользовавшись результатами, приведенными в работе [4], найдем

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{P_n}{n-1}=1-\cos\psi-2\sin\frac{\psi}{2}-\cos\psi\ln\left(\sin^2\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\right); \quad (10)$$

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{P_n}{n+1}=-1-\frac{1}{2}\cos\psi+\ln\left(1+\csc\frac{\psi}{2}\right); \quad (11)$$

$$F(\psi)=1-\frac{7}{4}\cos\psi-3\sin\frac{\psi}{2}-$$

$$-\frac{3}{2}\cos\psi\ln\left(\sin^2\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\csc\frac{\psi}{2}\right).$$

А зная, что $T=g_e\zeta+C$, приходим к результату

$$g_e\zeta+C=\frac{1}{4\pi}\int\left(a\Delta g+a^2\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)[1-F(\psi)]\,d\sigma. \quad (12)$$

Это первый аналог формулы Стокса. Здесь ζ — высота регуляризированного геоида над земным эллипсоидом; g_e — экваториальная постоянная земного ускорения. Формула (12) получена впервые. Чтобы найти второй аналог, преобразуем формулу (9).

Заметив, что $\frac{2n+1}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}+\frac{n}{n^2-1}$, перепишем формулу (9)

$$T=\frac{1}{4\pi}\int\left(a\Delta g+a^2\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int a^2\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\sum_{2}^{\infty}\frac{P_n(\cos\psi)}{n-1}\,d\sigma-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\left[a^2\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\sum_{2}^{\infty}\frac{nP_n(\cos\psi)}{n^2-1}+\right.$$

$$\left.+a\Delta g\sum_{2}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2-1}P_n(\cos\psi)\right]d\sigma. \quad (13)$$

Принимая во внимание ряды (4) и соотношение (7), нетрудно в третьем интеграле формулы (13) провести следующие преобразования:

$$\frac{n}{n^2-1}a\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_n+\frac{2n+1}{n^2-1}\Delta g_n=$$

$$=-\frac{n(n+2)}{n^2-1}\Delta g_n+\frac{2n+1}{n^2-1}\Delta g_n=-\Delta g_n, \tag{14}$$

после чего формула (13) примет вид

$$g_e\zeta+C=\frac{1}{4\pi}\int\left[a\Delta gF_1(\psi)+a^2\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}F_2(\psi)\right]d\sigma, \tag{15}$$

где $$F_1=\frac{1}{2\sin\frac{\psi}{2}}-\cos\psi=1+\sum_2^\infty P_n(\cos\psi);$$

$$F_2=\cos\psi+2\sin\frac{\psi}{2}+\cos\psi\ln\left(\sin^2\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\right).$$

Формула (15) — второй аналог формулы Стокса. Она точно совпадает с формулой (9) статьи [3], полученной другим методом.

Наконец, из соотношений (6) после суммирования сферических функций легко найти [1] третий аналог формулы Стокса:

$$g_e\zeta=\frac{1}{4\pi}\int a^2\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\left[\frac{1}{2}-F_3(\psi)\right]d\sigma;$$

$$F_3(\psi)=\sum_2^\infty\frac{2n+1}{(n-1)(n+2)}P_n(\cos\psi)=$$

$$=-\frac{1}{2}-\cos\psi-\cos\psi\ln\sin^2\frac{\psi}{2}. \tag{16}$$

Вычислим теперь высоту геоида по формулам (12), (15), (16) для модели, взятой из работ [5, 6]. В качестве геоида в ней принят эллипсоид Красовского. Данная модель имеет такие характеристики гравитационного поля:

$$\Delta g=g_e\Delta\beta\sin^2\Phi; \tag{17}$$

$$\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}=-\frac{2g_e}{a}\Delta\alpha(1-3\sin^2\Phi)+\frac{2g_e}{a}\Delta\beta\sin^2\Phi; \tag{18}$$

$$C = \frac{2}{3} a g_e \Delta\beta; \tag{19}$$

$$\Delta\alpha = 0{,}0000157; \quad \Delta\beta = -0{,}0000158; \quad a = 6378245 \text{ м};$$

$$\zeta_0 = -a\Delta\alpha \sin^2 \Phi. \tag{20}$$

Подставив выражения (17), (18) и (19) в формулы (12), (15) и (16) и проинтегрировав, нетрудно получить

$$\zeta_1 = \frac{2}{3} a(\Delta\alpha + \Delta\beta) - a(2\Delta\alpha + \Delta\beta) \sin^2 \Phi; \tag{12$'$}$$

$$\zeta_2 = \frac{2}{5} a(\Delta\alpha + \Delta\beta) - \frac{1}{5} a(\Delta\beta + 6\Delta\alpha) \sin^2 \Phi; \tag{15$'$}$$

$$\zeta_3 = \frac{1}{2} a(\Delta\alpha + \Delta\beta) - \frac{1}{2} a(3\Delta\alpha + \Delta\beta) \sin^2 \Phi. \tag{16$'$}$$

Ниже приведены результаты вычислений высот геоида по формулам (12′), (15′), (16′) и (20):

ζ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
ζ_1	0,5	3,5	12,2	25,5	41,9	59,3	75,6	84,4	97,6	100,6
ζ_2	0,3	3,3	12,0	25,3	41,6	58,9	75,2	84,1	97,3	100,3
ζ_3	0,3	3,3	12,0	25,3	41,6	58,9	75,2	84,0	97,1	100,1
ζ_0	0,0	3,0	11,7	25,0	41,4	58,8	75,1	83,9	97,1	100,1

Сравнение значений высот геоида, полученных гравиметрическим методом, с определенными по формуле (20), которая выведена геометрическим путем, дает возможность судить о точности формул (12), (15) и (16). Как и следовало ожидать, точность этих формул имеет порядок сжатия земного эллипсоида. При этом аномалии силы тяжести необходимо [7] учитывать до единиц мгл, а их вертикальные градиенты до сотых долей этвеша.

Заметим, что в формулы (12) и (15) входит постоянная C. Следовательно, они определяют фигуру не абсолютным образом: для вывода ζ нужно знать еще постоянную C. Это характерно и для формулы Стокса. Найти значение постоянной C очень сложно и этим еще никто не занимался. Что касается формулы (16), то она позволяет вычислить высоты геоида абсолютно: в нее постоянная C не входит.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин И. Ф. Об определении фигуры топографической поверхности Земли по аномалиям вертикального градиента силы тяжести. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1966, вып. 4.

2. Монин И. Ф. Новый метод вычисления элементов внешнего гравитационного поля и фигуры топографической поверхности Земли. — «Астрономический журнал АН СССР», 1966, вып. 3.
3. Монін І. Ф. До обгрунтування одного методу визначення фігури Землі. — ДАН УРСР. Серія Б, 1973, № 3.
4. Монін І. Ф. Про розклад гравітаційного потенціалу Землі в ряд Тейлора. — ДАН УРСР. Серія Б, 1967, № 9.
5. Монин И. Ф. К определению фигуры Земли с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия земного эллипсоида. — «Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1962, вып. 4.
6. Монін І. Ф. Про можливість визначення гравітаційного потенціалу Землі на геоїді з гравіметричних вимірів. — ДАН УРСР. Серія Б, 1971, № 7.
7. Монін І. Ф. Визначення других похідних потенціалу нормального гравітаційного поля Землі. — ДАН УРСР. Серія Б. 1971, № 5.

Работа поступила 20 декабря 1975 года.
Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.