УДК 528.21/22

*А. Н. МАРЧЕНКО*

# ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ГЕОПОТЕНЦИАЛА РЯДОМ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА*

Развивая предыдущие исследования [3—8], рассмотрим основанный на применении вариационного метода регуляризации А. Н. Тихонова [10—12] алгоритм определения значений и координат точечных масс для устойчивой аппроксимации гравитационного потенциала $V$ Земли суммой потенциалов точечных масс.

1. Допустим, что исходными данными служат отягощенные погрешностями результаты измерений, трактуемые далее как линейные функционалы $l_j = l_j(T)$ от возмущающего потенциала $T$ [10]. Ими могут быть значения аномалий силы тяжести, высоты геоида, результаты наблюдений топоцентрических дальностей до ИСЗ и др. Необходимо на основании геодезических измерений найти разложение функции

$$T \approx T_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_i} \tag{1}$$

по системе $1/r_i$ фундаментальных решений уравнения Лапласа ($r_i$ — расстояние от $i$-й массы до текущей точки), что в совокупности с представлением нормального потенциала [6] в виде потенциала пяти точечных масс позволит получить математически однородную модель точечных масс для гравитационного потенциала Земли $V$.

В соответствии с [1, 9] проблему аппроксимации системой точечных масс [1, 4, 6—8] можно рассматривать как обратную потенциалографическую задачу в дискретной постановке, поскольку потенциал $T$ трактуется суммой потенциалов точечных масс, расположенных на искомой поверхности $\sigma_A : \rho_i = f(\vartheta_i, \lambda_i)$.

Воспользуемся стандартным приемом решения некорректных задач и будем строить последовательность потенциалов $\{T_N\}$ под условием минимума сглаживающего функционала А. Н. Тихонова вида

$$\|\tilde{n}\|^2_{E_n} + \alpha \|T_N\|^2_q = \min, \tag{2}$$

в котором

$$\|\tilde{n}\|^2_{E_n} = \tilde{n}^T C^{-1}_{nn} \tilde{n}, \quad \tilde{n} = L - WM, \quad L = [l_j]_{n,1},$$

$$M = [m_i]_{N,1}, \quad W = [\omega_{ji}]_{n,N} \quad \omega_{ji} = \tilde{W}\left(\frac{1}{r_i(j)}\right), \tag{3}$$

---

* В основу работы положен доклад автора «Решение потенциалографической задачи в дискретной постановке» на международной школе по планетарной геодинамике (Киев, 1983 г., 29 сентября—9 октября).

а параметр регуляризации $\alpha$ можно найти одним из методов, рекомендуемым в [10, 12], для чего необходимо априорное задание, например, дисперсии $d$ результатов наблюдений.

В (2)—(3) $\bar{n}$ — вектор ошибок измерений, характеризуемых заданной ковариационной матрицей $C_{nn}$, которая определяет [10] метрику в $n$-мерном евклидовом пространстве $E_n$; $L$ — вектор результатов наблюдений (линейных функционалов); $\omega_{ji}$ — значения функций $\omega_i$ в точке $j$, получаемые как результат действия линейного оператора $\mathbb{W}$ на базисную функцию $1/r_i$, причем

$$l_j = \mathbb{W}(T_N(j)), \tag{4}$$

т. е. вид оператора $\mathbb{W}$ связан с типом функционалов $l_j^*$, $\|T_N\|_q^2$ — квадрат нормы возмущающего потенциала на гильбертовом пространстве $H_2^q$ с воспроизводящим ядром [5, 10], который выбираем здесь в качестве стабилизатора задачи и можем представить следующим образом [8]:

$$\| T_N \|_q^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} m_i m_j F_{ij}^q = M^T F M. \tag{5}$$

Здесь $F = [F_{ij}^q]_{N,N}$ — матрица, состоящая из элементов $F_{ij}^q$, представляющих скалярное произведение $\left(\frac{1}{r_i}, \frac{1}{r_j}\right)_{H_2^q}$. Замкнутые выражения для $F_{ij}^q$ при различных $q$ получены в [8].

Отметим, что при построении регулярной минимизирующей последовательности $\{T_N\}$ из решения (2) находим такую оценку $\tilde{T} \in H_2^q$ для потенциала $T \approx \tilde{T}$, которая обладает наименьшей нормой в $H_2^q$, и в этом смысле решение наиболее гладкое до «порядка регуляризации $q$» [10]. Таким образом, возникает задача выбора воспроизводящего ядра, определяющего метрику пространства $H_2^q$.

2. Решение удобно искать [10, 14] на таком гильбертовом пространстве $H_2^q$, асимптотика воспроизводящего ядра которого близка к спектру степенных дисперсий возмущающего потенциала [15]. Такое ядро считают оптимальным в том смысле, что выбор последнего обеспечивает в дальнейшем минимум средней квадратической ошибки аппроксимации. Отмеченная близость, в частности, характерна для ядра Чернинга—Раппа ($q=2{,}5$) [15]. Однако последнее найдено с использованием «точечных» значений аномалий силы тяжести, что соответствует детальному гравитационному полю Земли, и его использование в (2), (5) обосновано лишь при построении детальных моделей точечных масс геопотенциала.

Если же необходимо описание глобального гравитационного поля, под которым понимаем такую его аппроксимацию, которая с необходимой точностью описывает движение геодезических спутников, то можно считать, что в этом случае изучению подлежит более сглаженное поле, которому будут соответствовать меньшая

* Здесь и далее полагаем, что выполнена линеаризация (см., например, [10, 6]) геодезических наблюдений, так как в общем случае последние можно трактовать как нелинейные функционалы от $V$.

дисперсия поля на поверхности Земли и, возможно, несколько иной закон убывания степенных дисперсий. Поэтому имеет смысл построение модельной ковариационной функции такого сглаженного поля с учетом ее целевого назначения. Это особенно полезно для практической реализации алгоритма (2), так как обеспечивает возможность получения замкнутых выражений для $F^q_{ij}$, что затруднительно при использовании оператора сглаживания в известных модельных ковариационных функциях точечного поля.

Чтобы преодолеть указанные трудности, в [5] на основании сглаженных по стандартным трапециям 5×5° аномалий силы тяжести и гармоник модели GEM-9, построено шестипараметрическое ядро ЧНВ-2, подходящее именно для целей определения глобального гравитационного поля из комбинации спутниковых и наземных наблюдений. При этом учтена центральная симметрия области определения функций, гармонических вне сферы Бьерхаммара (которые используются для аппроксимации возмущающего потенциала $T$), что позволило получить наилучшее согласие модельных (по ЧНВ-2) и эмпирических степенных дисперсий, в частности, за счет введения двух «сфер Бьерхаммара».

Таким образом, при аппроксимации глобального поля имеет смысл пользоваться стабилизатором (5) с параметрами ядра ЧНВ-2 [5], а при локальном его уточнении — ядром Чернинга—Раппа [15].

3. В общем случае параметры точечных масс определяем из минимизации (2), решая систему нелинейных уравнений с дополнительным выбором параметра регуляризации. Выделяются две основные группы способов, основанные на итеративной регуляризации как традиционных методов спуска по возможным направлениям, так и методов штрафных функций. Для построения удобного алгоритма минимизации (2) желательно выбрать один из способов с высокой скоростью сходимости, например метод Ньютона. Тем более, что итеративная регуляризация способа Ньютона для выпуклых задач при обычных ограничениях гарантирует сходимость метода при любом выборе начального приближения [2]. Поэтому воспользуемся обобщенным модифицированным методом Гаусса—Ньютона, который приводит к устойчивому итерационному процессу

$$X_{k+1} = X_k - [G^T(X_k)\,G(X_k) + \beta_k B]^{-1}\,G^T(X_k)\,(W(X_k) - L) \qquad (6)$$

для поиска точки минимума (2) [2, 11], где $X_k$ — некоторое $k$-е приближение ($4N$-мерный вектор) уточняемых параметров ($m_i$, $d_i$, $\vartheta_i$, $\lambda_i$); $G$ — матрица ($n \times 4N$) производных, вычисленных в точках $j$ от функций $\omega_{ij}$ по параметрам ($m_i$, $d_i$, $\vartheta_i$, $\lambda_i$); $\beta_k > 0$ — параметр, подобный [11] параметру регуляризации; $B$ — линейный самосопряженный положительно-определенный оператор, который на практике аппроксимируется некоторой конечномерной матрицей $\tilde{B}$.

Анализируя возможности применения алгоритма (6) для поиска минимума в больших задачах, становится ясным, что при $n$ и $N$

порядка 100 из-за длительности вычислений решение задачи (за счет многократного обращения матриц большой размерности) может быть чересчур сложно. Очевидно, что необходима модификация процесса (6). Кроме того, в (6) не учитывается некоторая дополнительная априорная информация об искомом решении, которую для повышения устойчивости желательно использовать, формализуя ее, например, в виде линейных ограничений.

4. Применительно к конкретной задаче известны следующие «естественные» условия, связывающие коэффициенты $m_i$ разложения (1): сумма значений точечных масс должна равняться нулю, а центр масс получаемой многоточечной модели целесообразно совместить с центром масс Земли. Кроме того, при моделировании имеет смысл учитывать и те гармоники потенциала (например, резонансные), которые надежно определены методами спутниковой геодезии. Поэтому полагаем, что в общем случае известно $r$ условных уравнений

$$SM=P, \tag{7}$$

в которых элементы матрицы $S$ размерностью $(r\times N)$ связаны [6, 7] с координатами $d_i$, $\vartheta_i$, $\lambda_i$ точечных масс, а элементы вектора $P$ — те нормированные коэффициенты $\bar{C}_{nm}$, $\bar{S}_{nm}$ геопотенциала, с которыми согласовываем $m_i$. Кроме того, в соответствии с [8], можно установить следующее неравенство для расстояний $d_i$ от начала координат до точечных масс

$$R^*\leqslant d_i<R_{\text{В}}, \tag{8}$$

где $R_{\text{В}}$ — радиус сферы Бьерхаммара; $R^*$ — радиус сферы, вычисляемой для равноотстоящих $N$ точечных масс на основании замкнутого выражения для скалярного произведения $\left(\frac{1}{r_i}, \frac{1}{r_i}\right)_{H_2^q}$, которое можно интерпретировать ковариационной функцией потенциалов единичных точечных масс $(m_i=m_j=1)$, зависящей от сферического расстояния между ними и глубины их расположения. Здесь существенным является то, что значение $R_{\text{В}}$ в (8) зависит от гладкости аппроксимируемого поля [5], а $R^*$ связано с условиями гладкости, накладываемыми на решение [7, 8], и ($R_{\text{В}}$ и $R^*$) могут необходимым образом варьироваться в зависимости от детализации аппроксимируемого поля, т. е. исходной наблюдательной информации.

Наконец, следует отметить, что дающий на практике пока наилучшие результаты подход фиксации плановых координат ($\vartheta_i$, $\lambda_i$) точечных масс под экстремумами $\Delta g$ также основан на дополнительном изучении качественной картины исследуемого поля. При этом в основу положены «подобие» в отдельных регионах аппроксимируемой и аппроксимирующей функций и строгие математические соотношения, устанавливающие известный факт: поле силы тяжести отдельной точечной массы в ее «эпицентре» тем меньше, чем глубже она расположена; кроме того, по мере роста глубины поле силы тяжести все более приближается к однородному. Последнее накладывает определенные условия на $d_i$ и значения $m_i$ точечных масс, так как в целом для нас особенно ценно их локальное действие вследствие достаточно сложной структуры гравитационного поля Земли.

5. Таким образом, если воспользоваться введенными линейными ограничениями (7), (8), то задачу минимизации (2) можно рассматривать как задачу нелинейного программирования, для решения которой используется метод регуляризации со стабилизатором (5). Вместо алгоритма (6) более эффективно (с точки зрения экономии памяти ЭВМ для хранения матриц $G$ и $W$) построить итерационный процесс типа Гаусса—Зейделя для раздельного последовательного уточнения параметров ($m_i$, $d_i$, $\vartheta_i$, $\lambda_i$) с регуляризацией (6) на каждом шаге. В нашем случае уточнение масс $m_i$ с условиями (7) приводит [6, 7] к решению системы линейных уравнений и определению величин из следующего соотношения:

$$M = Q\,[\,W^T C_{nn}^{-1} G - S^T (SQS^T)^{-1} (SQW^T C_{nn}^{-1} L - P)],$$
$$Q = (W^T C_{nn}^{-1} W + \alpha F)^{-1}, \ \alpha = \beta_k. \tag{9}$$

Уточнение $\vartheta_i$ и $\lambda_i$ не связано с ограничениями, и лишь уточнению расстояний $d_i$ сопутствует система ограничений (8) в виде линейных неравенств. Алгоритмически выгоднее учитывать эти две группы ограничений раздельно. Теперь мы можем сформулировать с учетом сделанных замечаний алгоритм построения модели точечных масс с регуляризацией по [12].

Задавшись некоторым числом $N$ точечных масс, которыми мы хотим аппроксимировать геопотенциал $T$ по дискретной наблюдательной информации, зафиксируем их координаты $\vartheta_i$, $\lambda_i$ в соответствии с особенностями аномального поля и с учетом ошибок данных, а расстояния $d_i = R_0$ получим с помощью алгоритма [8] для неравноотстоящих точечных масс, лежащих на сфере радиуса $R_0 > R^*$. Значение $R^*$ находим для $N$ равноотстоящих масс и всегда $R^* < R_0$.

Имея координаты $N$ масс, вычисляем $m_i$ в соответствии с алгоритмом (9), обеспечивающим минимум (2) при ограничениях (7) в линейной постановке. Уточнение $d_i$, $\vartheta_i$, $\lambda_i$ выполняем далее раздельно в три шага на каждой итерации с помощью (6). В (6) в качестве вектора $X$ последовательно подразумеваются наборы из $N$ уточняемых параметров $d_i$, $\vartheta_i$, $\lambda_i$. Матрица $G$ имеет теперь на каждом шаге размерность $(n \times N)$ и состоит соответственно из производных от $\omega_{ij}$ по $d_i$ или $\vartheta_i$, или $\lambda_i$. В качестве матрицы $\bar{B}$, аппроксимирующей оператор $B$, целесообразно принять матрицу размерностью $(N \times N)$, состоящую из элементов $(m_i m_j F_{ij}^q)$ при $\beta_k = 1$.

Кроме того, на шаге уточнения расстояний $d_i$ необходима проверка условий (8). Этого можно достигнуть при выполнении соотношений

$$d_i^{k+1} = \begin{cases} d_i^{(k+1)} & \text{— если (8) выполняется,} \\ d_i^{(k)} & \text{— если (8) не выполняется,} \end{cases} \tag{10}$$

что вполне обосновано, если на каждом шаге такого итеративного процесса соблюдены условия монотонности. В нашей ситуации это означает последовательное уменьшение стандарта $\sigma_N$ аппроксимации после уточнения параметров каждого вида ($m_i$, $d_i$, $\vartheta_i$, $\lambda_i$). Если улучшения стандарта после какого-либо шага уже не происходит, то нужно вернуться к параметрам, полученным на предыдущей итерации и закончить процесс для конкретного $N$ на шаге уточнения значений $m_i$ точечных масс. Тем самым всегда будет выполняться (7), а сам процесс будет обеспечивать увеличение точности $\sigma_N$ аппроксимации. Если $\sigma_N > \sigma$ (требуемой точности описания поля), то после добавления в местах наибольших остаточных уклонений нужного числа масс необходимо повторять процесс с учетом добавленных точечных масс до тех пор, пока $\sigma_N \leqslant \sigma$. Таким образом, каждая итерация включает в себя четыре шага (по числу типов уточняемых параметров), а сам процесс заканчивается всегда после уточнения масс $m_i$.

6. Разработанный алгоритм тщательно апробировали при создании моделей точечных масс глобального гравитационного поля Земли. В качестве исходной информации использованы как аномалии силы тяжести, так и высоты геоида, вычисляемые в центрах равновеликих трапеций $5\times5°$ на основании моделей гармоник GEM-9 и GEM-10 B. Как и в более ранних работах [3], поле моделировали не традиционной системой функций (1), а «двойными», или «сопряженными» [3], точечными массами, фактически наборами четных и нечетных гармонических функций, ортогональных в $H_2^q$ [5].

Таким образом, аппроксимировали поле, соответствующее следующим порядкам усечения GEM-9: $(8\times8)$ — M2A (48); $(12\times\times12)$ — M3A (57); $(29\times12)$ — M3B (61); $(29\times16)$ M3C (71); $(29\times\times20)$ — M4A (83); а также GEM — 10 B: $(24\times24)$ — M5 (103); $(28\times28)$ — M6 (110); $(32\times32)$ — M7 (124); $(36\times36)$ — M8 (128)*. В результате можно сделать следующие выводы.

1. Использование ядра ЧНВ-2, хорошо согласованного со спектром степенных дисперсий $c_n$ и общей дисперсией 5° поля аномалий силы тяжести, позволило параметр регуляризации принимать равным единице. Качества получаемых со стабилизатором в виде (5) решений характеризует следующий численный эксперимент. Предположим, что с помощью обсуждаемого алгоритма определены параметры $N$ точечных масс. Расширим количество искомых величин $m_i$ масс до $(N+k)$, выбрав координаты дополнительных $k$ точечных масс, в точности совпадающими с координатами $d_i$, $\vartheta_i$, $\lambda_i$ одной, например $i$-й $(1\leqslant i\leqslant N)$, из определенных ранее. Если искать теперь значения всех $(N+k)$ масс по способу наименьших квадратов, то определитель системы $(N+k)$ нормальных уравнений будет равен нулю в силу линейной зависимости $(k+1)$. Из них и мы приходим к ситуации, в которой

* В скобках указано количество сопряженных точечных масс, аппроксимирующих с точностью 1,5—2 м «высоты геоида» соответствующих наборов гармоник. Например, набор M8 содержит 128 сопряженных масс и описывает поле GEM-10 B до 36 порядка и степени включительно.

получить решение невозможно. Использование же описанного метода позволяет найти все $(N+k)$ значения масс, причем сумма значений $(k+1)$ точечных масс, относящихся к $i$-й точке, равна значению $i$-й массы, которую определяли ранее в случае их общего числа $N$, остальные $(N-1)$ значения точечных масс из таких двух вариантов оказываются одинаковыми. Последнее, таким образом, свидетельствует как об устойчивости получаемых решений, так и о правильном подходе к выбору стабилизатора задачи.

2. Существенной на практике оказалась проверка условия монотонности на каждом шаге итерационного процесса. Это обеспечило всегда устойчивое построение минимизирующей последовательности $\{T_N\}$.

3. При раздельном уточнении $(m_i, d_i, \vartheta_i, \lambda_i)$ с помощью (6) более эффективные результаты дает процесс типа Гаусса—Зейделя, когда на последующем шаге используются (внутри одной итерации) улучшенные на предыдущих шагах параметры, чем такой алгоритм, в котором итерационное уточнение выполняется для каждого вида параметров в отдельности. Например, по сравнению с построенной ранее методом наименьших квадратов моделью М3 (63 сопряженные точечные массы, описывающие поле $(12\times12)$), предлагаемый алгоритм обеспечивает ту же точность аппроксимации с помощью лишь 53—54 масс. При том же числе масс, что и в модели М2 [3] (представляющей поле $(8\times8)$ с помощью 48 сопряженных точечных масс), данным алгоритмом удается повысить точность аппроксимации примерно в 1,5 раза.

4. При методе регуляризации со стабилизатором ЧНВ-2 значительно улучшается спектр степенных дисперсий $c_n$ многоточечных моделей, даже если в качестве исходных используются данные не об аномалиях силы тяжести, а о высотах геоида (информация не о производной потенциала, а фактически о самой функции $T$).

5. Построенные вариационным методом модели точечных масс апробировали при вычислении орбиты ИСЗ «Лагеос». Так, в случае использования решения М3А (57 сопряженных точечных масс, описывающих поле $(12\times12)$) после дифференциального уточнения орбиты среднеквадратическое значение $(O-C)$ на 2,5-суточной дуге составило $\sim 0{,}5$ м, а на 5-суточной дуге $\sim 0{,}6$ м. При обработке тех же наблюдений с помощью ранней модели М3 соответствующие среднеквадратические значения $(O-C)$ равны $\sim 1{,}1$ м и $\sim 1{,}2$ м. Даже при уменьшении числа масс с 63 до 57 использование этого алгоритма позволило существенно улучшить качества получаемой модели: точность представления орбиты спутника улучшилась в два раза.

6. Полученные модели точечных масс теперь можно использовать в качестве начального приближения при аппроксимации геопотенциала по наблюдениям, обеспечивающим разную степень детализации поля, в том числе и по спутниковым наблюдениям [6]. Кроме того, их вполне можно применять и при массовых вычислениях орбит. Так, в случае применения модели М4А (83 сопряженные массы), описывающей полный набор гармоник GEM-9,

## Параметры модели M4A сопряженных точечных масс, аппроксимирующей геопотенциал, описываемый полным набором гармоник GEM-9*

| № п/п | $\mu_i \cdot 10^5$ (ед. массы Земли) | $D_i$ (ед. экваториального радиуса) | $\vartheta_i^\circ$ (полярное расстояние) | $\lambda_i^\circ$ (долгота) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $-539{,}50280 \cdot 10^6$ | $0{,}1 \cdot 10^{-2}$ | 0,0 | 0,0 |
| 2 | $539{,}50280 \cdot 10^6$ | $0{,}81932823 \cdot 10^{-4}$ | 90,00 | 165,0656 |
| 3 | 1,23495 | 0,7726 | 9,60 | 236,60 |
| 4 | 1,31200 | 0,7647 | 31,75 | 220,94 |
| 5 | 1,46288 | 0,7581 | 79,94 | 332,11 |
| 6 | 2,71647 | 0,7858 | 88,43 | 284,18 |
| 7 | 0,86628 | 0,8515 | 79,67 | 116,59 |
| 8 | 0,99076 | 0,7934 | 26,83 | 330,31 |
| 9 | 1,10914 | 0,7133 | 52,45 | 257,12 |
| 10 | 0,99920 | 0,7896 | 28,01 | 140,72 |
| 11 | 0,94487 | 0,7577 | 65,10 | 64,90 |
| 12 | 0,57084 | 0,8217 | 66,00 | 352,23 |
| 13 | −1,42246 | 0,7444 | 49,48 | 296,82 |
| 14 | −[illegible],40408 | 0,7663 | 63,72 | 290,40 |
| 15 | −0,40253 | 0,8536 | 16,14 | 164,66 |
| 16 | −1,39807 | 0,7675 | 44,57 | 91,32 |
| 17 | −2,37941 | 0,7658 | 81,06 | 82,40 |
| 18 | −2,18667 | 0,6702 | 66,65 | 162,40 |
| 19 | −0,78105 | 0,8098 | 52,72 | 177,44 |
| 20 | −1,125[illegible]9 | 0,7033 | 64,45 | 224,30 |
| 21 | −1,42101 | 0,7035 | 22,14 | 21,80 |
| 22 | 0,44818 | 0,8840 | 69,26 | 197,06 |
| 23 | 0,47184 | 0,8[illegible]32 | 49,85 | 34,53 |
| 24 | −1,59162 | 0,8218 | 26,76 | 273,64 |
| 25 | 0,29615 | 0,9052 | 84,6[illegible] | 37,90 |
| 26 | 0,47561 | 0,8614 | 63,47 | 82,62 |
| 27 | 1,47788 | 0,6976 | 43,50 | 256,82 |
| 28 | 0,29623 | 0,8515 | 23,54 | 280,20 |
| 29 | −0,49920 | 0,8900 | 56,20 | 312,10 |
| 30 | 1,30539 | 0,8201 | 53,18 | 323,92 |
| 31 | 0,36537 | 0,9054 | 34,58 | 52,36 |
| 32 | −1,05289 | 0,8006 | 59,94 | 334,08 |
| 33 | −0,60109 | 0,8482 | 40,08 | 52,92 |
| 34 | 0,14357 | 0,9178 | 57,41 | 119,94 |
| 35 | −0,12977 | 0,9209 | 80,44 | 306,60 |
| 36 | −0,08693 | 0,9370 | 81,64 | 183,10 |
| 37 | −0,18452 | 0,9068 | 62,24 | 22,56 |
| 38 | 0,47982 | 0,7574 | 55,87 | 3,97 |
| 39 | −0,18672 | 0,8854 | 32,01 | 359,31 |
| 40 | −0,11391 | 0,8393 | 87,37 | 17,66 |
| 41 | −5,27737 | 0,5587 | 55,22 | 229,49 |
| 42 | 2,55994 | 0,5819 | 16,93 | 357,62 |
| 43 | −5,41874 | 0,5835 | 75,24 | 322,87 |
| 44 | −1,42076 | 0,4973 | 80,49 | 319,66 |
| 45 | 1,45801 | 0,8105 | 30,86 | 212,82 |
| 46 | 3,24649 | 0,7205 | 50,40 | 321,82 |
| 47 | 9,60485 | 0,7050 | 60,67 | 48,49 |
| 48 | −9,29082 | 0,5700 | 63,26 | 65,76 |
| 49 | −1,77284 | 0,7812 | 50,81 | 160,30 |
| 50 | 2,12833 | 0,7462 | 84,03 | 223,39 |
| 51 | 2,39444 | 0,7377 | 73,96 | 276,08 |
| 52 | 1,56830 | 0,7101 | 76,30 | 7,18 |

| № п/п | $\mu_i \cdot 10^6$ (ед. массы Земли) | $D_i$ (ед. экваториального радиуса) | $\vartheta_i^*$ (полярное расстояние) | $\lambda_i^*$ (долгота) |
|---|---|---|---|---|
| 53 | 0,71406 | 0,8265 | 83,66 | 349,31 |
| 54 | −0,69324 | 0,7040 | 59,62 | 8,62 |
| 55 | 1,14815 | 0,8398 | 31,67 | 91,31 |
| 56 | −3,98619 | 0,7762 | 33,08 | 161,38 |
| 57 | −2,29375 | 0,7184 | 49,07 | 225,19 |
| 58 | 1,36166 | 0,7908 | 44,62 | 249,31 |
| 59 | −1,58486 | 0,7893 | 33,91 | 269,16 |
| 60 | 2,17047 | 0,7508 | 88,97 | 123,94 |
| 61 | −1,99410 | 0,7749 | 83,11 | 74,59 |
| 62 | 1,45212 | 0,7731 | 61,53 | 83,34 |
| 63 | 1,92260 | 0,6932 | 45,91 | 18,96 |
| 64 | −3,83518 | 0,6502 | 74,08 | 242,51 |
| 65 | 2,48937 | 0,7854 | 17,59 | 328,37 |
| 66 | −1,45149 | 0,7742 | 58,39 | 112,72 |
| 67 | 4,06253 | 0,7200 | 47,25 | 137,43 |
| 68 | −2,36796 | 0,7421 | 16,40 | 251,90 |
| 69 | −1,22788 | 0,8254 | 72,02 | 357,09 |
| 70 | −0,44664 | 0,9017 | 73,37 | 110,78 |
| 71 | 0,64456 | 0,8504 | 89,43 | 201,99 |
| 72 | 0,26294 | 0,9269 | 34,64 | 102,43 |
| 73 | 0,98167 | 0,8198 | 61,01 | 222,10 |
| 74 | −0,83218 | 0,8280 | 33,56 | 39,48 |
| 75 | −0,28214 | 0,8939 | 69,45 | 294,07 |
| 76 | 0,43033 | 0,8216 | 3,62 | 160,06 |
| 77 | 0,86659 | 0,8056 | 24,69 | 47,25 |
| 78 | 0,91396 | 0,8167 | 78,60 | 258,30 |
| 79 | −0,06533 | 0,9450 | 49,57 | 1,84 |
| 80 | −2,81343 | 0,7998 | 62,46 | 47,81 |
| 81 | −0,88434 | 0,7951 | 57,76 | 25,31 |
| 82 | −0,68300 | 0,8059 | 45,78 | 57,74 |
| 83 | 0,08683 | 0,9373 | 86,44 | 93,80 |

* $\mu_i = m_i/fM$ — величина $m_i$ $i$-й точечной массы, выраженная в единицах массы планеты ($fM = 398600{,}64 \cdot 10^9$ м$^3$/с$^2$); $D_i = d_i/a$ — относительное расстояние ($a = 6378139$ м); $\vartheta_i$, $\lambda_i$ — соответственно полярное расстояние и долгота $i$-й массы. Нормальное поле задается потенциалом $U = fM/r$ центральной массы; для вычисления $V = U + T$ необходимо использовать соотношение (5) из [3] и параметры модели из данной таблицы: $S_1 = 40$, $S_2 = 83$.

в дифференциальном уточнении орбиты «Лагеос» (на интервале в 2,5 и 5 сут) среднеквадратическое значение величин ($O - C$) получается таким же, как и с использованием полного набора гармоник GEM-9; причем экономия вычислительного времени при обработке одной дуги достигает 50% (см. таблицу).

Подобный (по точности представления орбиты) результат приведен в [13], где обсуждается модель ста точечных масс, представляющих возмущающий потенциал в виде (1); нормальное поле описано гармониками GEM-10 до 4-го порядка и степени включительно. Эта модель получена из аппроксимации компонент $\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ функции grad $V$ по GEM-10 с применением итерационного процесса типа (6), в котором оператор $B$ заменен единичной матрицей, а подбираемый параметр регуляризации $\beta_k=$ отличен от единицы; кроме того, все параметры уточняются одновременно. Однако, сравнивая обсуждаемые подходы построения моделей М4А и в [13], отметим то существенное обстоятельство что в [13] в качестве исходной информации использовались значения производных $\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$, которые как раз и присутствуют в правых частях уравнений движения при вычислении орбит ИСЗ. При построении же модели М4А исходными данными были фактически, значения функции $V$, но применение в качестве стабилизатора задачи квадрата нормы потенциала (5) с параметрами воспроизводящего ядра ЧНВ-2 [5] позволило с необходимой для вычисления орбиты ИСЗ «Лагеос» точностью получать и сами производные $\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$. Последний факт имеет необходимое теоретическое обоснование [14, 10], из которого следует (при трактовке потенциала $T$ как элемента гильбертова пространства $H$ с воспроизводящим ядром) равномерная аппроксимация как самой функции $T$, так и ее первых производных в случае $q=2{,}5$.

**Список литературы:** 1. *Алексидзе М. А.* Об одном представлении аномального гравитационного поля. — ДАН СССР, 1966, т. 170, № 4. 2. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. 3. *Марченко А. Н.* Модель точечных масс глобального гравитационного поля Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1980, вып. 32. 4. *Марченко А. Н.* О некоторых теоретических аспектах представления геопотенциала потенциалом системы точечных масс. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1982, вып. 3. 5. *Марченко А. Н.* Гильбертовы пространства функций, гармонических вне сферы Бьерхаммара, и глобальная ковариационная функция аномального поля. — К., 1983. — Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 293, Ук-Д83. 6. *Марченко А. Н.* О построении модели точечных масс, геопотенциала по результатам спутниковых наблюдений. — К., 1983. — Рукопись деп. в УкрНИИНТИ № 292, Ук-Д83. 7. *Марченко А. Н.* Об использовании фундаментальных решений уравнения Лапласа для определения гравитационного поля и фигуры Земли. — In: Proc. Int. Symp. Figur of the Earth, the Moon and other Planets. Monograph Series of VÚGTK. Prague, 1983. 8. *Марченко А. Н.* О выборе стабилизатора для устойчивой аппроксимации потенциала рядом фундаментальных решений уравнения Лапласа. — In: Proc. Int Symp. Figur of the Earth, the Moon and other Planets. Monograph. Series of VÚGTK. Prague, 1983. 9. *Мещеряков Г. А.* Обратные задачи теории геопотенциала. — К., 1983. — (Препринт / АН УССР Ин-т теорет. физики). 10. *Нейман Ю. М.* Вариационный метод физической геодезии. — М.: Недра, 1979. 11. *Старостенко В. И., Оганесян С. М.* Методы регуляризации и оптимизации в гравиметрии. — В кн.: Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. К., 1983. 12. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. 13. *Barthelmes F., Kautzleben H.* A new method of modelling the gravity field of the Earth by point masses. — Paper presented to the General Assembley of the IAG Simposium C., Improved gravity field estimation on a global basis. Hamburg 1983. 14. *Krurup T.* A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. — Danis Geod. Inst., 1969, № 44. 15. *Tsherning C. C., Rapp R.* Closed covariance expression for gravity anomalies, geoid undulations and defections of vertical implied by anomaly degree variance models. — Report Dept of Geod. Sc. Ohio. State Univer., 1974, № 208.

Статья поступила в редколлегию 22. 11.