

Список литературы: 1. Хижак Л. С., Маслиц Д. И. Исследование годового хода коэффициента рефракции. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1967, вып. 6. 2. Маслиц Д. И., Хижак Л. С., Тагетъ Б. Т. и др. Исследование закономерностей изменения коэффициента рефракции в зимний период. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1968, вып. 7. 3. Маслиц Д. И. Некоторые общие закономерности влияния вертикальной рефракции на точность геодезического нивелирования. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1969, вып. 9. 4. Маслиц Д. И., Хижак Л. С. Исследование зависимости коэффициента рефракции от периода суток и высоты луча. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1969, вып. 10. 5. Маслиц Д. И. Основные итоги исследования замкнутой рефракции в горных условиях. — В кн.: 50 лет учреждения Высшего геодезического управления. Львов, 1970. 6. Маслиц Д. И. Определение рефракции при наблюдении высоких объектов в атмосфере. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1971, вып. 13.

Статья поступила в редакцию 31.12.83

УДК 528.088(21, 22, 23, 24)

С. И. МАТНЕК

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРА ПОГРЕШНОСТИ ЗАМКАНИИ ГОРИЗОНТА

Частые изменения методов обработки результатов измерений, полученных способом круговых приемов, можно объяснить недостаточной изученностью характера погрешности замыкания горизонта (ПЗГ) [2, 3, 4, 8, 9]. Противоречивость выводов по исследованию характера ПЗГ обусловлена несовершенством применяемых методов исследований и возможными сдвигами оснований (подставок) теодолита в процессе измерений. Систематические погрешности — 0,37" и — 0,03", полученные в [3, 4] как среднюю алгебраические суммы ПЗГ в приемах, характеризуют среднюю величину лишь остаточного совместного влияния погрешностей величину лишь остаточного совместного влияния погрешностей случайного и систематического (если таковые имеют место) характера в приемах по всему объекту. Однако этот показатель не может характеризовать реальные значения систематического сдвига в программах (приемах) на каждой конкретной станции. Так, если на каждой или отдельных станциях исследуемых объектов имели место систематические погрешности в замыкании горизонтов, но при этом имело место равенство $[+\Delta] = |[-\Delta]|$, где Δ — ПЗГ в приемах, то по методике исследования, применяемой авторами [3, 4], эти погрешности не обнаруживаются, так как среднее их значение в данном случае будет равно нулю. Кроме того, использование средних абсолютных значений ПЗГ в приемах, которые в свою очередь получены как средние алгебраические значения из ПЗГ в полуприемах соответствующих приемов, тоже отразится на результатах исследований.

Существенным недостатком большинства применявшихся методов следует считать то, что в них ПЗГ во вторых полуприемах определялись как разности начальных и повторных отсчетов по начальному направлению $\Delta_n = R_1 - R'_1$, а не наоборот $\Delta_n = R'_1 - R_1$,

как требует теория погрешностей. Здесь R_1 и R'_1 — соответственно начальный и замыкающий отсчеты по начальному направлению. Из изложенного следует, что вопрос о характере ПЗГ окончательно не изучен, а методика исследования его нуждается в принципиальном совершенствовании. Предлагаем новую методику исследования этого вопроса.

Методика гипотетического исследования характера погрешности замыкания горизонта. Предварительно рассмотрим одно важное свойство абсолютных значений случайных равнооточных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения. С одной стороны, арифметическая середина абсолютных значений ПЗГ в полуприемах представляется выражением

$$\Delta_0 = [|\Delta|]/n, \quad (1)$$

где Δ — ПЗГ в полуприемах; n — число выполненных полуприемов. С другой стороны,

$$\Delta_0 = 0,80\sigma, \quad (2)$$

Здесь σ — среднее квадратическое отклонение результатов измерений. Таким образом,

$$[|\Delta|]/n = 0,80\sigma. \quad (3)$$

В теории погрешностей доказано, что при $n \geq 50 \dots 100$ значение σ стабилизируется и практически становится независимым от дальнейшего увеличения числа измерений. Значит, уже при ограниченном, но достаточном числе измерений

$$0,80\sigma \rightarrow \text{const}, \quad (4)$$

а следовательно, и

$$\Delta_0 \rightarrow \text{const}, \quad (5)$$

т. е. арифметическая середина абсолютных значений случайных равнооточных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения, уже при $n \geq 50 \dots 100$ стремится к некоторой постоянной величине

$$\Delta_0 \rightarrow 0,80\sigma, \quad (6)$$

характеризующей данные условия измерений.

Если результаты равнооточных измерений разбить на группы по числу направлений в программах, то при числе измерений $n \geq 50 \dots 100$ имеем соотношение

$$\Delta_k = [|\Delta|]/n_k \rightarrow \text{const}, \quad (7)$$

где n — общее число полуприемов в группах с числом направлений k .

Предлагаемая методика исследования характера ПЗГ основана на проверке предполагаемых гипотез. Рассмотрим три возможных случая образования этой погрешности, найдем соотношения, которым они должны удовлетворять, и проверим их выполнение.

Первая гипотеза. ПЗГ в подприемах носят случайный характер и не зависят от числа направлений в программах. В этом случае: а) должно удовлетворяться соотношение (7), т. е. $\Delta_k \rightarrow \text{const}$; б) так как соотношение (7) справедливо для групп с различным числом направлений, то будет справедливо неравенство

$$\Delta_k/k > \Delta_{k+1}/k+1; \quad (8)$$

в) из соотношений (7) и (8) следует, что значение ПЗГ, соответствующее одному направлению программы, будет равно

$$\Delta_k = \Delta_k/k(k+1). \quad (9)$$

Вторая гипотеза. ПЗГ в подприемах — линейная функция числа направлений в программах и не содержит случайной величины. Тогда: а) в смежных группах будет иметь место неравенство

$$\Delta_{k+1} > \Delta_k; \quad (10)$$

б) так как Δ является линейной функцией числа направлений, то должно выполняться соотношение

$$\Delta_k/k = \text{const}; \quad (11)$$

в) приращение ПЗГ, соответствующее увеличению числа направлений в программе на единицу, будет

$$\Delta_{k+1} - \Delta_k = \delta_k. \quad (12)$$

Третья гипотеза. ПЗГ в подприемах являются функцией случайных погрешностей двухкратного наблюдения начального направления и пропорциональны числу направлений в программах. В этом случае: а) в группах с большим числом направлений ПЗГ в подприемах должна быть больше, т. е. должно выполняться неравенство (10); б) так как ПЗГ состоит из случайной части погрешности двухкратного наблюдения начального направления, которая во всех группах согласно (7) примерно одинакова, то разность (12) должна определять абсолютное значение поворота лимба, вызванного наблюдением одного дополнительного направления; в) так как часть ПЗГ, являющаяся линейной функцией числа направлений в программах, не влияет на (11), а оставшаяся практически одинаковой (7) во всех группах, то часть ПЗГ, соответствующая наблюдению одного направления, в группах с меньшим числом направлений должна быть меньше, т. е. здесь должно выполняться неравенство (8).

Предлагаемая методика была использована для выявления характера ПЗГ в триангуляции II класса, состоящей из 267 пунктов. Наблюдения велись теодолитами ТТ-2/6 и ОТ-02 способом круговых приемов. Исследования выполнены отдельно для теодолитов ТТ-2/6 и ОТ-02. Результаты исследований приведены в таблице. Из анализа данных этой таблицы следует:

гипотеза о случайном характере ПЗГ и независимости ее от числа направлений в программах подтверждается только выполнением условия (8) (графа 7). Условия (7) и (9) (графы 5 и 8) не подтверждаются;

гипотеза о линейной зависимости ПЗГ от числа направлений в программах, исключаяющей случайную ее часть, подтверждается только выполнением условия (10). Условия (11) и (12) (графа 6) не подтверждаются;

гипотеза о зависимости ПЗГ от случайных погрешностей двухкратного наблюдения начального направления и пропорциональ-

Результаты анализа погрешностей замыкания горизонта

Марки теодолитов	Число направлений в программе, k	Число выполненных подприемов, n_k	$ \Delta n_k$	$\frac{ \Delta n_k}{n_k}$	Формула (7)	$\delta_k = \Delta_{k+1} - \Delta_k$	Формула (12)	$\frac{\Delta_k}{k}$	Формула (8)	$\delta_{II} = \frac{\Delta_k}{k(k+1)}$	Формула (9)	$\sigma_{II} = \sigma_{II} + \sigma_c = \Delta_k - \Delta_{k-1}$	Формула (14)
ТТ-2/6	1				0,83°	0,19"	0,59"	0,16"	0,00°				
	2				1,02	0,19	0,43	0,13	0,19			17%	
	3	454	548,7"	1,21	0,12	0,40	0,07	0,38	0,38			31	
	4	1088	1450,9	1,33	0,24	0,33	0,02	0,50	0,50			38	
	5	1782	2800,3	1,57	0,21	0,31	0,01	0,74	0,74			47	
	6	1140	2027,8	1,78	0,30	0,30	0,01	0,95	0,95			53	
ОТ-02	1	4464	6827,7	1,53	0,19	0,69	0,033	0,00°	0,00°			2	
	2			1,38	0,03	0,47	0,31	0,03	0,03			4	
	3	1002	1444,5	1,41	0,00	0,48	0,12	0,06	0,06			4	
	4	638	916,7	1,44	0,00	0,36	0,05	0,18	0,18			12	
	5	1378	2154,4	1,56	0,04	0,31	0,06	0,14	0,14			9	
	6	1458	2215,7	1,52	0,03	0,25	0,077	0,077	0,077			9	

ности ее числу направлений в программах подтверждается только выполнением условия (8) (графа 7) и (10). Условия (12) (графа 6) не подтверждаются.

Таким образом, первая и вторая гипотезы отрицаются полностью, а третья не полностью подтверждается. Поэтому первая и вторая гипотезы должны быть отброшены как недостаточно обоснованные. Несомненное условие (12) в третьей гипотезе объясняется тем, что не на каждой станции есть систематическая часть погрешности, а возможное значение ее в зависимости от числа направлений в каждом конкретном случае может проявляться по-своему. Кроме того, вероятно влияние увеличения числа направлений в программе на случайную часть погрешности. При направленной части ПЗГ может меняться в значительно большей чем случайная часть ПЗГ может меняться в значительной степени масштабах, чем систематическая. Из изложенного следует, что отрицание корреляционной связи между числом направлений в программе и величиной ПЗГ далеко не всегда оправдано. Это имеет место только в том случае, когда условия прохождения зрения луча по начальному направлению сохраняют свое постоянство в течение наблюдений всей программы на каждой станции исследуемого объекта при отсутствии других факторов, прямо или косвенно вызывающих подобную корреляционную связь, что практически невозможно.

Приближенную суммарную часть ПЗГ находим путем двукратного наблюдения начального направления и той ее части, которая определяется линейной зависимостью числа направлений в соответствующих программах. С этой целью по данным графы 6 таблицы найдем среднее приращение ПЗГ, соответствующее увеличению программы на одно направление. Для теодолитов ТТ-2/6

эта величина равна $0,19''$, а для теодолитов OT-02 — $0,03''$. По этим данным методом экстраполяции, несколько приближенно, вычислим модули средних значений ПЗГ в несущих группах, программы которых содержат соответственно по два и одному направлению. Их значения в таблице приведены выше пунктирных линий. Величины $0,83''$ и $1,38''$ (графа 5) представляются собой возможные значения ПЗГ, вызванные двухкратным наблюдением начального направления теодолитами ТТ-2/6 и OT-02 соответственно. Вычитая из каждой строки графы 5 значения $0,83''$ для теодолитов ТТ-2/6 и $1,38''$ для теодолитов OT-02, получим те части ПЗГ, которые представляются как функции направлений в соответствующих группах (графа 9). Тут же их значения выражены в процентах относительно средних значений ПЗГ.

Из изложенного следует, что в общей части ПЗГ доля погрешности, определяемая числом направлений в программах, возрастает с увеличением числа направлений (графа 9). С целью окончательного решения вопроса о целесообразности распределения этой части погрешности пропорционально номерам направлений произведем углубленный анализ комплекса условий, способствующих образованию ПЗГ.

Анализ комплекса условий, способствующих образованию погрешности замыкания горизонта. Сложности в определении характера ПЗГ обусловлены особой спецификой угловых измерений. Наиболее достоверными результатами измерений являются те, которые получены в средний момент изотермии. Но так как точно определить средний момент изотермии и его продолжительность трудно, то наблюдения, как правило, ведутся в некоторой его окрестности. Кроме того, по каждому направлению станции с течением времени условия прохождения визирного луча меняются с различной скоростью, чем ограничивается эффективность момента изотермии. С удалением момента наблюдений от среднего момента изотермии ПЗГ возрастают. В программах с большим числом направлений промежуток времени между двумя последовательными наблюдениями начального направления в полупримере меняются условия прохождения визирного луча по начальному направлению, более значимы погрешности, вызванные кручением инструментального столлика, фазой визирной цели, смещением лимба и подставки теодолита, нестрогим выполнением оптико-механических условий инструмента, соответствующей установкой его в рабочее положение. Из анализа факторов, способствующих образованию ПЗГ, нетрудно заметить, что составляющие ее могут иметь различный характер и различные числовые характеристики. В этой связи представим ПЗГ в виде суммы составляющих

$$\Delta = \delta + \sigma_n + \sigma_c \quad (13)$$

и проанализируем их.

δ — случайная часть общей ПЗГ, определяемая техническими характеристиками инструмента и индивидуальными особенностями наблюдателя. Эта часть погрешности обладает всеми свойствами случайных величин и практически не зависит от числа направлений в программах и не подлежит распределению по направлениям согласно [1].

σ_n — систематическая часть погрешности собственно направления (в данном случае начального направления), определяемая условиями прохождения визирного луча, фазой визирной цели, неравномерной частью кручения инструментального столлика, подставки теодолита и лимба, нестрогим выполнением оптико-механических условий инструмента, соответствующей установкой его в рабочее положение и т. д. Эта часть рассматриваемой погрешности может иметь по каждому направлению станции свои специфические особенности и также не подлежит распределению по направлениям.

σ_c — систематическая часть погрешности собственно станции, определяемая равномерностью смещения лимба с подставкой теодолита и кручением инструментального столлика в процессе выполнения полупримера. Эта часть погрешности подлежит распределению по всем направлениям программ согласно [1].

В настоящее время утвердилось не совсем обоснованное мнение, что ПЗГ по начальному направлению является следствием равномерного кручения инструментального столлика. Согласно же [5], кручение деревянных сигналов неравномерно и в 5-минутных интервалах имеет скачкообразный характер. Но так как продолжительность полупримера обычно не больше этого интервала, то вероятность того, что на протяжении всего полупримера кручение сигнала оставалось равномерным очень мала.

Из изложенного следует, что часть ПЗГ в графе 9 таблицы, хотя и является функцией числа направлений, распределять пропорционально номерам направлений в программе нельзя, так как она состоит из двух составляющих σ_n и σ_c . Причем первая из них относится только к начальному направлению, а вторая составляющая σ_c согласно [1] должна быть исключена из результатов измерения. Но так как процентное соотношение составляющих σ_n и σ_c неизвестно, становится сомнительной целесообразность распределения этой части погрешности пропорционально номерам направлений. Если же все-таки принято решение исправить результаты измерений, то поступают следующим образом. По результатам измерений всего объекта вычисляют графу 5 таблицы. Часть погрешности, подлежащую распределению по всем направлениям в соответствующих группах, находят по формуле

$$\gamma = \sigma_n + \sigma_c = \Delta_k - \Delta_{k-1} \quad (14)$$

Поправки в соответствующие направления программы определяют по формуле

$$\gamma_k = \frac{\gamma}{n} (k - 1), \quad (15)$$

где n — число направлений в программе; k — текущий номер направлений в программе. Погрешность γ получает знак, обратный ПЗГ соответствующей программе. Эффективность этого способа уравнивания прямо зависит от объема используемого статистического материала. Однако такое распределение ПЗГ не совсем безупречно и требует большой подготовительной работы. В этой связи, чтобы упростить вопрос о распределении ПЗГ, целесообразно различно изменить соответствующую методику измерения горизонтальных углов способом круговых приемов.

Сущность способа круговых приемов с последовательной переменной начальных направлений. С целью ослабления систематического влияния погрешности из-за увеличения лимба предложе- но [10] начинать наблюдения в каждом приеме с нового направления. При этом образуется n отдельных последовательностей. По нашему мнению, такую методику наблюдения направлений можно использовать для решения задачи о ПЗГ. Выполняя наблюдения по такой методике, выводят среднее из начального и замыкающего отсчетов в каждой последовательности и приводят все отсчеты к выбранному начальному направлению станции. Представим такие программы наблюдения направлений для станций с различным числом направлений:

$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
1.2.3.1	1.2.3.4.1	1.2.3.4.5.1	1.2.3.4.5.6.1
2.3.1.2	2.3.4.1.2	2.3.4.5.1.2	2.3.4.5.6.1.2
3.1.2.3	3.4.1.2.3	3.4.5.1.2.3	3.4.5.6.1.2.3
	4.1.2.3.4	4.5.1.2.3.4	4.5.6.1.2.3.4
		5.1.2.3.4.5	5.6.1.2.3.4.5
		6.1.2.3.4.5.6	

При наблюдении каждой из таких программ одним приемом любой угол, составленный двумя смежными направлениями, будет измерен n раз. Для каждой последовательности направлений необходимо N приемов наблюдений:

$$N = m/n, \quad (16)$$

где m — число приемов для способа круговых приемов; n — число направлений на станции. Окружность N в (16) до целых в сторону увеличения, качество триангуляционных построений улучшится, а трудоемкость работ несколько возрастет. Оценка точности результатов измерений производится как и в обычном способе круговых приемов. Из изложенного следует, что результаты исследований не подтверждают линейную зависимость ПЗГ от числа направлений в программе; погрешность замыкания горизонта (ПЗГ) при измерениях горизонтальных углов (направлений) способом круговых приемов — функция погрешностей двухкратного наблюдения начального направления и зависит от числа направлений; методика измерения горизонтальных углов (направлений) способом круговых приемов не позволяет выявить значение систематической части ПЗГ; замена обычного способа круговых

приемов программами круговых приемов с последовательной переменной начального направления приводит уравнивание станции к выводу среднее из начального и замыкающего отсчетов.

Список литературы: 1. Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР. — М.: Недра, 1966. 2. Кривошеин Ф. Н., Давидов В. В. Руководство по высшей геодезии. М., 1939. 3. Никитин В. И., Макаров Г. В. Обработка измерений, произведенных способом круговых приемов. — Геодезия и аэрофотограмметрия, 1968, № 6. 4. Шувальков В. М., Курочкин А. М. Систематические ошибки замыкания горизонта в способе круговых приемов. — Геодезия и картография, 1965, № 9.

Статья поступила в редакцию 11. 01. 84

УДК 528.21:517.53:521.13

Г. А. МЕШЕРЯКОВ

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО ШАРОВЫМ ФУНКЦИЯМ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО В ПЛОСКОСТИ ЭКВАТОРА ПЛАНЕТЫ

Как показано в [3], нечетная относительно экваториальной плоскости планеты часть $V_{\text{неч}}$ потенциала V ее притяжения может трактоваться потенциалом $V'' = V_{\text{неч}}$ двойного слоя, находящегося в указанной плоскости и имеющего очертания экваториального сечения планеты. Этот слой назван дипольным диском (ДД) в отличие от материального диска (МД), имеющего ту же геометрию, что и ДД, но несущего на себе простой слой, потенциал V' которого описывает четную часть $V_{\text{чет}}$ — потенциала V планеты, причем сумма потенциалов этих дисков выражает потенциал планеты $V_{\text{чет}} + V_{\text{неч}} = V$.

Для развития и использования предлагаемой концепции правящих дисков необходимо иметь разложения их внешних потенциалов по шаровым функциям, которые в принципе легко получить в соответствии с известной традиционной схемой разложения объемного потенциала. Однако, если разложение $V' = V_{\text{чет}}$ безусловно повторяет разложение V (незначительное отличие обусловлено определяющим потенциалом V'' характером центрального потенциала к другому виду коэффициентов ряда), то разложение ультрасферических многочленов — полиномов Тегенбауэра [1, 4, 5], что определяет специфику вывода искомого представления. Поэтому остановимся на нем более подробно.

Обозначим площадь плоского диска буквой S , а его контур — будем считать, что планетопотенциальный радиус-вектор центра диска $r'_s = r'_c - \epsilon$, где r'_c — радиус-вектор экваториального сечения планеты, а $\epsilon > 0$ — сколь угодно малая величина. Пользуясь далее квазипланетопотенциальной системой координат Ox_1z (см. рисунк), будем задавать точку P , внешнюю относительно пла-