

где n — число направлений в программе; k — текущий номер направлений в программе. Погрешность γ получает знак, обратный ПЗГ соответствующей программы. Эффективность этого способа уравнивания прямо зависит от объема используемого статистического материала. Однако такое распределение ПЗГ не совсем безупречно и требует большой подготовительной работы. В этой связи, чтобы упрядить вопрос о распределении ПЗГ, целесообразно изменить соответствующую методику измерения горизонтальных углов способом круговых приемов.

Сущность способа круговых приемов с последовательной переменной начальных направлений. С целью ослабления систематического влияния погрешности из-за увлечения лимба предложено [10] начинать наблюдения в каждом приеме с нового направления. При этом образуются n отдельных последовательностей. По нашему мнению, такую методику наблюдений направлений можно использовать для решения задачи о ПЗГ. Выполняя наблюдения по такой методике, выводят среднее из начального и замыкающего отсчетов в каждой последовательности и приводят все отсчеты к выбранному начальному направлению станции. Представим такие программы наблюдений направлений для станций с различным числом направлений:

$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
1.2.3.1	1.2.3.4.1	1.2.3.4.5.1	1.2.3.4.5.6.1
2.3.1.2	2.3.4.1.2	2.3.4.5.1.2	2.3.4.5.6.1.2
3.1.2.3	3.4.1.2.3	3.4.5.1.2.3	3.4.5.6.1.2.3
	4.1.2.3.4	4.5.1.2.3.4	4.5.6.1.2.3.4
		5.1.2.3.4.5	5.6.1.2.3.4.5
			6.1.2.3.4.5.6

При наблюдении каждой из таких программ одним приемом двумя углам, составленный двумя смежными направлениями, будет измерен n раз. Для каждой последовательности направлений необходимо N приемов наблюдений:

$$N = m/n, \quad (16)$$

где m — число приемов для способа круговых приемов; n — число направлений на станции. Окружая N в (16) до целых в сторону увеличения, качество триангуляционных построений улучшится, а трудоемкость работ несколько возрастет. Оценка точности результатов измерений производится как и в обычном способе круговых приемов. Из изложенного следует, что результаты исследований не подтверждают линейную зависимость ПЗГ от числа направлений в программах; погрешность замыкания горизонта (ПЗГ) при измерении горизонтальных углов (направлений) способом круговых приемов — функция погрешностей двухкратного наблюдения начального направления и зависит от числа направлений; методика измерения горизонтальных углов (направлений) способом круговых приемов не позволяет выявить значение систематической части ПЗГ, замена обычного способа круговых

приемов программами круговых приемов с последовательной переменной начального направления приводит уравнивание станции к выводу среднего из начального и замыкающего отсчетов.

Список литературы: 1. Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР. — М.: Недра, 1966. 2. Красовский Ф. Н., Давидов В. В. Руководство по высшей геодезии. М., 1939. 3. Никифоров Б. И., Макаров Г. В. Обработка измерений, произведенных способом круговых приемов. — Геодезия и аэрофотограмметрия, 1968, № 6. 4. Шурдин В. М., Куршин А. М. Систематические ошибки замыкания горизонта в способе круговых приемов. — Геодезия и картография, 1965, № 9.

Статья поступила в редакцию 11. 01. 84

УДК 528.21:517.53:521.13

Г. А. МЕШЕРЯКОВ

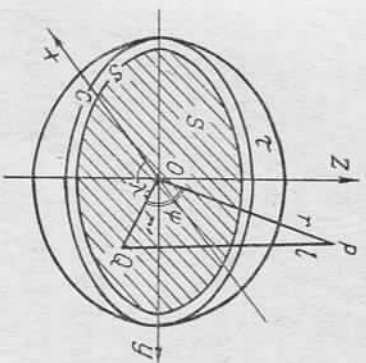
О РАЗЛОЖЕНИИ ПО ШАРОВЫМ ФУНКЦИЯМ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО В ПЛОСКОСТИ ЭКВАТОРА ПЛАНЕТЫ

Как показано в [3], нечетная относительно экваториальной плоскости планеты часть $V_{\text{неч}}$ потенциала V ее притяжения может трактоваться потенциалом $V'' = V_{\text{неч}}$ двойного слоя, находящегося в указанной плоскости и имеющего очертания экваториального сечения планеты. Этот слой назван дипольным диском (ДД) в отличие от материального диска (МД), имеющего ту же геометрию, что и ДД, но несущего на себе простой слой, потенциал V' которого описывает четную часть $V_{\text{чет}}$ — потенциала планеты, причем сумма потенциалов этих дисков выражает потенциал планеты $V_{\text{чет}} + V_{\text{неч}} = V$.

Для развития и использования предлагаемой концепции гравитирующих дисков необходимо иметь разложения их внешних потенциалов по шаровым функциям, которые в принципе легко получить в соответствии с известной традиционной схемой разложения объемного потенциала. Однако, если разложение $V' = V_{\text{чет}}$ было бы определено разложением потенциала V' характером концентрации масс, приводящим к другому виду коэффициентов ряда, то разложение потенциала V'' двойного слоя требует привлечения аппарата ультрасферических многочленов — полиномов Гегенбауэра [1, 4, 5], что определяет специфику вывода искомого представления. Поэтому остановимся на нем более подробно.

Обозначим площадь плоского диска буквой S , а его контур — s ; будем считать, что планетопотенциальный радиус-вектор контура диска $r'_s = r'_c - \varepsilon$, где r'_c — радиус-вектор экваториального сечения планеты, а $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина. Пользуясь далее квазипланетопотенциальной системой координат $Oxyz$ (см. рисунок), будем задавать точку P , внешнюю относительно пла-

неты τ , либо ее прямоугольными координатами x, y, z , либо сферическими r, ϑ, λ , а точку Q слоя DD — также прямоугольными $x_Q = \xi, y_Q = \eta$ или полярными r', λ' (для нее $z_Q = \xi = 0$, а $\vartheta = \pi/2$). Выбирая в плоской области S слой DD за положительное направление нормали и отрицательное направление оси Oz , выпи-



Дипольный диск.

шем выражения потенциала двойного слоя, расположенного на S и имеющего плотность ν ,

$$\begin{aligned} V''(P) &= -f \int_S \nu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) dS = f \int_S \frac{z\nu(\xi, \eta) dS}{(V(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= f \int_S \frac{z\nu_a dS_a}{l_{pq}^3}, \end{aligned} \quad (1)$$

где f — гравитационная постоянная; $z_P = r_P \cos \vartheta_P$;

$$l_{pq} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi} = r(1 - 2h \cos \psi + h^2)^{1/2},$$

приним для любой точки P , внешней относительно S , $h = r'/r < 1$. Из последнего выражения (1) следует, что во всех точках экваториальной плоскости вне слоя $V''(x, y, 0) = 0$, так как при этом $z = 0$. Далее считаем, что угол принадлежит открытому промежутку $(0, 2\pi)$, т. е. случаем выполнения равенств $\psi = 0$ и $\psi = 2\pi$ исключены.

Для получения нужного представления потенциала $V''(P)$ разложим $1/l_{pq}$ в ряд по степеням $h = r'/r$. С этой целью вспомним производящую функцию полиномов Гегенбауэра: $C_n^k(\cos \psi)$ [1, 4, 5]

$$(1 - 2h \cos \psi + h^2)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^k(\cos \psi) h^n,$$

приним степенной ряд, фигурирующий справа, является абсолютно сходящимся при всяком $h < 1$.

Значит, в нашем случае

$$V''(P) = (f/r^3) \int_S z_P \nu_Q \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{3/2}(\cos \psi) h^n \right) dS.$$

Обращаясь теперь к теореме сложения многочленов Гегенбауэра, выпишем ее при $k = 3/2$ и $\vartheta = \pi/2$:

$$\begin{aligned} C_n^{3/2}(\cos \psi) &= C_n^{3/2}(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda - \lambda')) = \\ &= \sum_{m=0}^n 2^{m+1} (m+1)(n-m)! \frac{[(3/2)_m]^2}{(2)_{n+m+1}} (\sin \vartheta)^m C_{n-m}^{3/2+m} \cos \vartheta(0) C_m^1(\cos(\lambda - \lambda')), \end{aligned}$$

$$\text{где } (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+k-1); (\alpha)_0 = 1,$$

$$\text{а } C_V^{3/2+m}(0) = \begin{cases} (-1)^V \left(\frac{3}{2} \right)_{V/2} & 0 \text{ при } V \text{ нечетном;} \\ (V/2)! & \text{при } V \text{ четном.} \end{cases}$$

Пронтегрируем почленно ряд, которым выражен теперь потенциал двойного слоя; в результате получим

$$\begin{aligned} V'' \sec \vartheta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^n \frac{2^{m+1} (m+1)(n-m)! [(3/2)_m]^2}{(2)_{n+m+1}} \times \\ &\times C_{n-m}^{3/2+m}(0) (\sin \vartheta)^m C_{n-m}^{3/2+m}(\cos \vartheta) \int_S \nu(\xi, \eta) r''^n C_m^1(\cos(\lambda - \lambda')) dS. \end{aligned}$$

Займемся входящими сюда интегралами по DD

$$J_{nm} = \int_S \nu r''^n C_m^1(\cos(\lambda - \lambda')) dS.$$

Рассмотрим суммы [1], определяющие $C_m^1(\cos \gamma)$, где $\gamma = \lambda - \lambda'$:

$$\begin{aligned} C_m^1(\cos \gamma) &= \sum_{k=0}^m \cos[(m-2k)\gamma] = \sum_{k=0}^m |\cos(m-2k)\lambda| \times \\ &\times |\cos(m-2k)\lambda'| + \sum_{k=0}^m |\sin(m-2k)\lambda| |\sin(m-2k)\lambda'|. \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } J_{nm} = \sum_{k=0}^m a_{nmk} \cos(m-2k)\lambda + \sum_{k=0}^m b_{nmk} \sin(m-2k)\lambda,$$

$$\text{где } \left. \begin{aligned} a_{nmk} \\ b_{nmk} \end{aligned} \right\} = \int_S \nu r''^n \left\{ \begin{aligned} \cos(m-2k)\lambda' \\ \sin(m-2k)\lambda' \end{aligned} \right\} dS. \quad (2)$$

Обозначив еще

$$M_{nm} = \{2^{m+1}(m+1)(n-m)!(3/2)_m\}^2 C_{n-m}^{3/2+m}(0)/(2)_{n+m+1}, \quad (3)$$

$$\text{запишем } V'' \sec \vartheta = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^n M_{nm} (\sin \vartheta)^m C_{n-m}^{3/2+m}(\cos \vartheta) \times \\ \times \left[\sum_{k=0}^m a_{nmk} \cos(m-2k)\lambda + \sum_{k=0}^m b_{nmk} \sin(m-2k)\lambda \right].$$

Перейдем теперь от полиномов Лежандра к присоединенным функциям Лежандра на основании известной связи между ними [5]:

$$(\sin \vartheta)^j C_l^{(\pm)}(\cos \vartheta) = \frac{1}{2^j (1/2)_j} P_l(\cos \vartheta).$$

Тогда после очевидных преобразований получим

$$V'' = f \operatorname{ctg} \vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^n N_{nm} P_{n+1}^{m+1}(\cos \vartheta) \left[\sum_{k=0}^m a_{nmk} \cos(m-2k)\lambda + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^m b_{nmk} \sin(m-2k)\lambda \right],$$

где

$$N_{nm} = \frac{M_{nm}}{2^{m+1} (1/2)_{m+1}}. \quad (4)$$

Но одна из известных рекуррентных формул [1, 4] для присоединенных функций Лежандра с одинаковым нижним индексом

$$P_p^{q+2}(x) + 2(q+1) \frac{x}{1-x^2} P_p^{q+1}(x) + (p-q)(p+q+1) P_p^q(x) = 0$$

позволяет записать $\operatorname{ctg} \vartheta P_{n+1}^m(\cos \vartheta) = -\frac{(n-m+1)(n+m+2)}{2(m+1)} \times$

$$\times P_{n+1}^m(\cos \vartheta) - \frac{1}{2(m+1)} \cdot P_{n+1}^{m+2}(\cos \vartheta).$$

Используя эту формулу, имеем

$$V'' = V''(r, \vartheta, \lambda) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^n \left(-\frac{N_{nm}}{2(m+1)} \right) [(n-m+1) \times \\ \times (n+m+2) P_{n+1}^m(\cos \vartheta) + P_{n+1}^{m+2}(\cos \vartheta)] \times \\ \times \left[\sum_{k=0}^m a_{nmk} \cos(m-2k)\lambda + \sum_{k=0}^m b_{nmk} \sin(m-2k)\lambda \right]. \quad (5)$$

Получив представление потенциала V'' ДД, заметим, что его искомого разложение по шаровым функциям должно иметь вид

$$V'' = \sum_{p=1}^{\infty} Y_p / r^{p+1}, \text{ где } Y_p = Y_p(\vartheta, \lambda) \text{ — сферические функции } p\text{-го порядка.}$$

В таком представлении V'' (в отличие от разложений объемного потенциала и потенциала простого слоя, в которых суммирование начинается с $p=0$) первым членом разложения является Y_1/r^2 , что связано с поведением V'' на бесконечности, где потенциал двойного слоя убывает пропорционально $1/r^2$ [2]. Из уже полученного выражения V'' в виде (5) видно, что оно удовлетворяет этому условию.

Значит, входящие в (5) суммы $f_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (\dots) [\dots] [\dots]$ должны быть сферическими функциями $(n+1)$ -го порядка. Не постулируя этого разложим каждую из этих сум по элементарным сферическим гармоникам, что, с одной стороны, подтвердит это положение, а с другой — даст явное выражение указанных функций, чем и будет завершено получение искомого разложения потенциала V'' по шаровым функциям.

При разложении $f_n = f_n(\vartheta, \lambda)$ по элементарным сферическим функциям получим

$$\sum_{l=0}^n \sum_{j=0}^l (\alpha_{lj} \cos j\lambda + \beta_{lj} \sin j\lambda) P_l(\cos \vartheta) = Y_{n+1}(\vartheta, \lambda),$$

где

$$\alpha_{ij} = \frac{2i+1}{2\pi} \int_0^\pi f_n(\vartheta, \lambda) P_i(\cos \vartheta) \cos j\lambda d\vartheta; \\ \beta_{ij} = \frac{2i+1}{4\pi} \int_0^\pi f_n(\vartheta, \lambda) P_i(\cos \vartheta) \sin j\lambda d\vartheta; \quad \beta_{i0} = 0.$$

При вычислении коэффициентов α_{ij} , β_{ij} видно, что за счет ортогональности сферических функций на единичной сфере все равны нулю, кроме

$$\alpha_{l-n+1, j=m} = \frac{2n+3}{2\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{N_{nm}}{2(m+1)} \right) (n-m+1)(n+m+2) \times \\ \times [P_{n+1}^m(\cos \vartheta)]^2 \left\{ \begin{aligned} &\alpha_{nm0} (\cos m\lambda)^2 \cdot d\vartheta; \quad \alpha_{l-n+1,0} = \\ &= \frac{2n+3}{4\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{N_{m0}}{2} \right) (n+1)(n+2) [P_{n+1}(\cos \vartheta)]^2 \alpha_{n00} d\vartheta. \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} a_{n+1,m} \\ b_{n+1,m} \end{matrix} \right\} = K_{n,m} \left\{ \begin{matrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{matrix} \right.$$

при

$$K_{nm} = \left(-\frac{N_{nm}}{2(m+1)} \right) \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!}.$$

Таким образом, получено

$$Y_{n+1}(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^{n+1} K_{nm} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{n+1}^m(\cos \vartheta),$$

где

$$\left. \begin{matrix} a_{nm} = f a_{nm0} \\ b_{nm} = f b_{nm0} \end{matrix} \right\} = f \int_{\vartheta}^{\pi} v(r', \lambda') r'^n \left\{ \begin{matrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{matrix} \right. dS \quad (6)$$

и

$$K_{nm} = -\frac{(n+m+2)!}{2(1/2)_{n+1}(2)_{n+m+1}} \left[\left(\frac{3}{2} \right)_m \right]^2 C_{n-m}^{3/2+m}(0).$$

Заметим, что выполненный расчет аннулировал отдельное выделение вычисления $a_{n+1,0}$, и коэффициенты a_{n0} определяются первой формулой (6) с учетом K_{n0} по последней из приведенных формул при $m=0$.

Перед тем как подставлять полученное выражение сферических функций Y_{n+1} в разложение (5) вспомним формулы (3), (4), за счет которых ряд членов этого разложения обратится в ноль. В искомом ряду будут отсутствовать все члены, содержащие K_{nm} , в которых фигурируют $C_{n-m}^{3/2+m}(0)$ при нечетных разностях индексов $(n-m)$. По этой причине, в частности, разложение Y'' не будет содержать секториальных гармоник (ибо $K_{n,n+1}=0$), поэтому исключаемое представление потенциала ДД можно записать в виде

$$Y''(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^n K_{nm} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{n+1}^m(\cos \vartheta), \quad (7)$$

где после ряда упрощений

$$K_{nm} = (-1)^{\frac{n-m}{2}+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(n-m)!}{2!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{n-m}{2}}. \quad (8)$$

Коэффициенты ряда (7), даваемые формулами (6) и зависящие от структуры двойного слоя (от его плотности v), аналогичны по своему значению стоксовым постоянным в ряде для объемного потенциала V . Формула (7) является окончательной: она дает искомое разложение потенциала V'' двойного слоя, располо-

женного в плоскости экватора в области S , с произвольной плотностью v , причем в этом разложении должны быть опущены члены, разность индексов n и m в которых нечетна.

В начале статьи отмечалось, что потенциал V'' тождествен нечетной части $V_{\text{веч}}$ потенциала V планеты. Поэтому, сохраняя за символами n и m роль индексов в коэффициентах (6) ряда (7) и сравнивая последний с нечетной частью традиционного ряда потенциала V планеты, получаем

$$\left. \begin{matrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{matrix} \right\} = \frac{f M R^{n+1}}{K_{nm}} \left\{ \begin{matrix} C_{n+1,m} \\ S_{n+1,m} \end{matrix} \right. \quad (9)$$

где C_{nm} , S_{nm} — ее безразмерные стоксовы постоянные. Значит, коэффициенты a_{nm} , b_{nm} ряда (7) — это соответствующие им по (9) раз меры стоксовы постоянные планеты, поделенные на величину K_{nm} из выражения (8).

При заданном внешнем потенциале планеты V полученное здесь разложение потенциала $V'' = V_{\text{веч}}$ с коэффициентами (6) позволяет теперь найти степенные моменты плотности v дипольного диска ДД, а по ним и саму плотность v . Это вместе с решением аналогичной задачи для материального диска МД, с одной стороны, приводит к завершению построения конструкции гравитирующих дисков, создающих во внешнем (относительно планеты) пространстве ее поле притяжения, а с другой — раскрывает новые возможности создания моделей гравитационного потенциала планет, в частности многоточечных.

Список литературы: 1. Бейтмен Г., Эрдиш А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965—1974. 2. Вильямс В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. 3. Меццарков Г. А. О представлении потенциала планеты суммой потенциалов плоских слоев. — Геодезия, картография и аэрофотоосъемка, 1984, вып. 40. 4. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ГИИТД, 1961. 5. Уиттер Э. Т., Вигсон Дж. Н. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1963.

Статья поступила в редколлегию 14.01.84

УДК 551.24:528.2/3

Е. А. МИНИН

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Исходя из современных концепций возникновения вертикальных движений земной коры, предположим, что модель движений, являясь в общем случае аддитивной нестационарной случайной функцией, состоит из детерминированной и случайной частей. При этом первая, в свою очередь, представляема суперпозицией периоди-