

Откуда

$$\left. \begin{matrix} a_{n+1,m} \\ b_{n+1,m} \end{matrix} \right\} = K_{n,m} \left\{ \begin{matrix} a_{nm0} \\ b_{nm0} \end{matrix} \right.$$

при

$$K_{nm} = \left(-\frac{N_{nm}}{2(m+1)} \right) \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!}.$$

Таким образом, получено

$$Y_{n+1}(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^{n+1} K_{nm} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{n+1}^m(\cos \vartheta),$$

где

$$\left. \begin{matrix} a_{nm} = f a_{nm0} \\ b_{nm} = f b_{nm0} \end{matrix} \right\} = f \int_V (r', \lambda') r'^n \left\{ \begin{matrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{matrix} \right. dS \quad (6)$$

и

$$K_{nm} = -\frac{(n+m+2)!}{2(1/2)_{m+1}(2)_{n+m+1}} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^m \right]^2 C_{n-m}^{3/2+m}(0).$$

Заметим, что выполненный расчет аннулировал отдельное выделение вычисления $a_{n+1,0}$ и коэффициенты a_{n0} определяются первой формулой (6) с учетом K_{nm} по последней из приведенных формул при $m=0$.

Перед тем как подставлять полученное выражение сферических функций Y_{n+1} в разложение (5) вспомним формулы (3), (4), за счет которых ряд членов этого разложения обратится в ноль. В искомом ряду будут отсутствовать все члены, содержащие K_{nm} , в которых фигурируют $C_{n-m}^{3/2+m}(0)$ при нечетных разностях индексов $(n-m)$. По этой причине, в частности, разложение Y'' не будет содержать секторальных гармоник (ибо $K_{n,n+1}=0$), поэтому исключаемое представленные потенциала ДД можно записать в виде

$$V''(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^n K_{nm} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{n+1}^m(\cos \vartheta), \quad (7)$$

где после ряда упрощений

$$K_{nm} = (-1)^{\frac{n-m}{2}+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(n-m)!}{2!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{n-m}{2}}. \quad (8)$$

Коэффициенты ряда (7), даваемые формулами (6) и зависящие от структуры двойного слоя (от его плотности ν), аналогичны по своему значению стоксовым постоянным в ряде для объемного потенциала V . Формула (7) является окончательной: она дает искомое разложение потенциала V'' двойного слоя, располо-

женного в плоскости экватора в области S , с произвольной плотностью ν , причем в этом разложении должны быть опущены члены, разность индексов n и m в которых нечетна.

В начале статьи отмечалось, что потенциал V'' тождествен нечетной части $V_{\text{неч}}$ потенциала V планеты. Поэтому, сохраняя за символами n и m роль индексов в коэффициентах (6) ряда (7) и сравнивая последний с нечетной частью традиционного ряда потенциала V планеты, получаем

$$\left. \begin{matrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{matrix} \right\} = f M R^{n+1} \left\{ \begin{matrix} C_{n+1,m} \\ S_{n+1,m} \end{matrix} \right. \quad (9)$$

где C_{ab} , S_{ab} — ее безразмерные стоксовы постоянные. Значит, коэффициенты a_{nm} , b_{nm} ряда (7) — это соответствующие им по (9) раз мерные стоксовы постоянные планеты, поделенные на величину K_{nm} из выражения (8).

При заданном внешнем потенциале планеты V полученное здесь разложение потенциала $V'' = V_{\text{неч}}$ с коэффициентами (6) позволяет теперь найти степенные моменты плотности ν дипольного диска ДД, а по ним и саму плотность ν . Это вместе с решением аналогичной задачи для материального диска МД, с одной стороны, приводит к завершению построения конструкции гравитирующих дисков, создающих во внешнем (относительно планеты) пространстве ее поле притяжения, а с другой — раскрывает новые возможности создания моделей гравитационного потенциала планеты, в частности многоточечных.

Список литературы: 1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965—1974. 2. Вайдиширов В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. 3. Мещеряков Г. А. О представлении потенциала планеты суммой потенциалов плоских слоев. — Геодезия, картография и аэрофотогеодезия, 1984, вып. 40, 4. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., Л.: ГИТТЛ, 1951. 5. Уиттер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1963.

Статья поступила в редколлегию 14. 01. 84

УДК 551.24:528.23

Е. А. МИНИН

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Исходя из современных концепций возникновения вертикальных движений земной коры, предположим, что модель движения, являясь в общем случае аддитивной нестационарной случайной функцией, состоит из детерминированной и случайной частей. При этом первая, в свою очередь, представляема суперпозицией периоди-

ческих колебаний, а вторая — стационарной случайной функцией и чисто случайной составляющей.

Ввиду отсутствия достаточного количества данных о движении земной коры во времени рассмотрим ее динамику в пространстве, заменив двухмерный спектральный анализ одномерным и считая случайные движения функциями расстояния, т. е.

$$K(d) = \sum_j \sin(a_j d) + \varphi(d) + \epsilon \dots, \quad (1)$$

где $\varphi(d)$ и ϵ обусловлены случайными нетектоническими изменениями высот реперов и ошибками нивелирования.

Спектральная плотность периодического колебания, вычисленная по конечному интервалу изменения его аргумента, будет иметь ограниченные пики на дискретных частотах ω_n , равных основным частотам процесса. Поскольку в (1) на периодическую функцию накладывается непериодическая случайная функция, пики спектральной плотности могут появиться на частоте, отличной от частоты периодического колебания и, следовательно, не будут надежной оценкой истинного спектра.

Для устранения подобного недостатка применяют различные весовые функции для сглаживания спектра. В этом случае возможные отклонения оценки спектра от положения истинного пика на оси частот характеризуются интервалом разрешения $\Delta\omega$, который для сглаженной оценки равен $1/t_0$, где t_0 — длина взвешивающего окна [3].

В настоящей работе применяли весовую функцию Парзена [1] и для вычисления сглаженной оценки спектра использовали формулу

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \{ \lambda_0 C_0 + 2 \sum_{k=1}^m \lambda_k C_k \cos \omega_j K \}, \quad (2)$$

где $\omega_j = \pi j/m$; $j=0, 1, \dots, m$; λ_k — весовая функция, вычисленная по формуле

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 - \frac{6K^2}{m^2} \left(1 - \frac{k}{m}\right), & 0 \leq k \leq m/2, \\ 2 \left(1 - \frac{k}{m}\right)^3, & m/2 \leq k \leq m, \end{cases} \quad (3)$$

а C_k — коэффициент автокорреляции, вычисленный по формуле

$$C_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} K_i K_{i+k} \dots \quad (4)$$

Исследовались движения земной коры по четырем линиям нивелирования I и II классов, выполненного ГУГК при СМ СССР в 1924—1976 годах.

Линии проходят по Восточно-Европейской платформе, причем две из них примерно в меридиональном и две в широтном направ-

лениях. Характеристика линий дана в таблице, а изменения в соответном положении реперов по трассе нивелирования за 20—40-летний период показаны на рис. 1.

На рис. 1 движения земной коры даны относительно начала линий после исключения линейной интерполацией по способу нан-

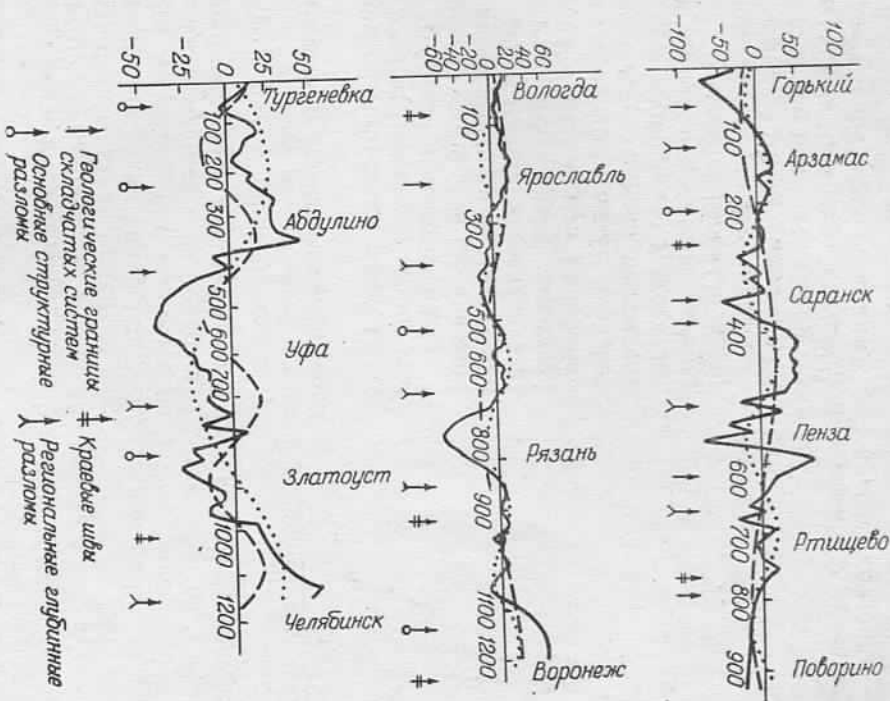


Рис. 1. Движение земной коры по линиям нивелирования I—III.

меньших квадратов низкочастотной составляющей, период которой считался гораздо большим длины линии.

С учетом дискретности наблюдаемых значений, а также неравномерности расположения реперов на линиях верхняя частота анализа была ограничена частотой наложения (Найквиста): $\omega_n = \pi/\Delta d$, где Δd — минимальное расстояние между двумя смежными реперами.

Для более точного определения частоты колебания длину взвешивающего окна выбирали возможно большей за счет увеличения случайной ошибки в интенсивности колебаний. Из-за этого ампли-

туды колебаний определяли не по спектру, а по найденной частоте способом наименьших квадратов [3]

$$\varphi = \arctg \left(- \frac{K_i \cos \varepsilon_i}{K_i \sin \varepsilon_i} \right),$$

$$A = 2 |K_i \sin \varepsilon_i| / n \cos \varphi,$$

$$(5)$$

где φ — начальная фаза; A — амплитуда колебаний; $\varepsilon_i = (i-1)\omega$; K_i — значение функции в дискретных точках $i=1, 2, \dots, n$.

Кроме того, для более детальной прорисовки спектра наблюдаемые значения движений земной коры были сгущены в местах, где расстояния между реперами (следствие утраты последних) значительно превысили среднее. Сгущение произведено путем линейного интерполирования между двумя смежными реперами. Таким образом, в результате сгущения среднее расстояние между точками наблюдения было доведено до 8...9 км.

Нормированные спектры исходных линий показаны на рис. 2, там же указаны интервалы разрежений

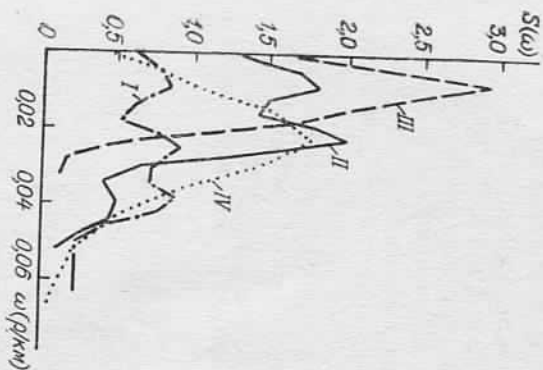


Рис. 2. Нормированные спектры исходных линий. — I; --- II; III; - · - · - IV.

По найденной частоте и по (5) вычисляли остальные параметры синусоиды, которую затем исключали из первоначального ряда. Остаток снова подвергли спектральному анализу, а по (2) — (4) и по вновь установленной частоте колебания находили параметры следующей синусоиды и т. д. Эти операции повторяли до тех пор, пока амплитуда выделенной синусоиды не становилась по величине одного порядка со средним квадратическим значением случайной части ряда.

В результате установлены синусоидальные составляющие модели (1), описывающие тектонические волны, периоды колебаний которых и амплитуды приведены в таблице.

Как показали дальнейшие исследования, оставшуюся стационарную случайную часть можно аппроксимировать линейным авторегрессионным рядом вида

$$K_i + b_1 K_{i-1} + b_2 K_{i-2} = \varepsilon_i, \quad (6)$$

где ε_i — случайная величина.

Параметры этого ряда, вычисленные через первые две автокорреляции по формулам $b_1 = -r_1(1-r_2)/(1-r_1^2)$, $b_2 = -(r_2-r_1^2)/(1-r_1^2)$, приведены в таблице. Здесь же указаны средние квадратические значения случайной величины ε .

Характеристика выделенных линий

Номер линии	Название линий	Класс инвентаризации	Год инвентаризации		Длина, км	Расстояние между реперами, км		Период синусоида, км	Амплитуда, мм	Коэффициент корреляции авторегрессии, мм	Скорость движения, мм/год		P, мм/км
			1	2		min	среднее				средняя	max	
I	Торский — Поворино	I	1924—1929	1970—1976	900	5,7	16,6	250	17	$b_1 = -0,47$ $b_2 = 0,10$ 15,7	0,4	2,0	0,94
II	Вологда — Воронеж	I	1949—1952	1972—1976	1198	5,4	11,3	280	16	$b_1 = -0,66$ $b_2 = -0,10$ 6,2	0,8	2,5	0,55
III	Куйбышев — Челябинск	I	1927—1942	1957	1155	4,9	10,3	920	26	$b_1 = -0,73$ $b_2 = 0,08$ 7,2	1,1	2,2	0,70
V	Курское — Пильна	II	1926—1929	1961—1972	507	4,7	11,8	270	114	$b_1 = -0,68$ $b_2 = 0,28$ 18,9	3,0	8,0	1,60

Периоды выделенных тектонических волн представимы в той или иной степени по каждой линии, начиная со 126 км. Тектонические волны с периодом колебания менее 100 км в спектре не выделяются, поскольку, с одной стороны, значения их амплитуд одного порядка или даже менее случайной части ряда, а, с другой — разрешающая способность спектра очень мала.

На рис. 1 показаны две первые синусоиды с наибольшими амплитудами и соответствующие разному фундаменту Восточно-Европейской платформы. Как видим, глубинные разломы фундамента платформ в основном совпадают с местами, где движение земной коры меняет знак, т. е. приурочено к местам наибольших напряжений. Это говорит о том, что современные движения земной коры контролируются докембрийскими разломами и являются наследственными.

Скорости движения по всем линиям, определенные относительно средней плоскости, характерны для платформенных областей и не превышают 2...2,5 мм в год. Исключение составляет линия IV, где скорость движения в четыре раза выше, поэтому остановимся на этой линии несколько подробнее.

На рис. 3 показаны исходное движение земной коры по линии IV примерно за последние сорок лет, а также выделенные тектонические волны. Как видим, наибольшее по абсолютной величине движение положительное и приходится на район Муром—Ардмас. Линия пересекает с запада на восток Токмовскую систему складов поднят, входящую в состав Волжско-Камской антекли-

