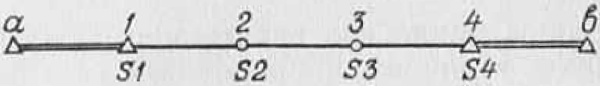
УДК 528.14/16

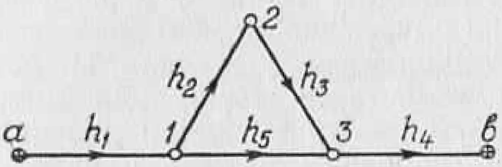
И. Ф. МОНИН

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ УРАВНЕННЫХ ФУНКЦИЙ С УЧЕТОМ ОШИБОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Рассмотрим приложение теории определения корреляционных матриц функций при уравнивании геодезических сетей [1, 2] к оценке точности полигонометрии и нивелировки с учетом ошибок исходных данных.



а



б

Полигонометрия (*а*): $1=2=3=4\approx\pi$ — измеренные углы; $s_1=s_2=s_3\approx 1$ — измеренные стороны; *2, 3* — определяемые пункты; a, 1, 4, в — исходные пункты с известными координатами;

нивелировка (*б*): a, b — исходные пункты с известными высотами H_a и H_b; *1, 2, 3* — определяемые пункты; $h_1, h_2, \ldots, h_5$ — измеренные превышения.

1. Коррелатный метод. В этом методе поправки в измеренные величины определяем [1, 2]:

$$-V=QA^{\mathrm{T}}N^{-1}W, \tag{1}$$

где свободный член в условном уравнении $AV+W=0$ можно представить как функцию измеренных величин и исходных данных

$$W=M_0+Al+A_\mu M. \tag{2}$$

Здесь A — матрица коэффициентов условных уравнений; l — матрица-столбец измеренных величин; $N=AQA^{\mathrm{T}}$; Q — корреляционная матрица измерений; M_0 — некоторая матрица-столбец; A_μ — матрица коэффициентов исходных данных; M — матрица-столбец исходных данных.

Легко показать, что корреляционную матрицу любой линейной уравненной функции F в этом случае вычисляем:

$$Q_F = f^{\mathrm{T}}\,(Q - QA^{\mathrm{T}}\,N^{-1}\,AQ)\,f + f^{\mathrm{T}}\,QA^{\mathrm{T}}\,N^{-1}\,N_\mu\,N^{-1}\,AQf,$$

$$f^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\cdot\frac{\partial F}{\partial l_2}\cdots\frac{\partial F}{\partial l_n}\right),\; N_\mu = A_\mu\,Q_\mu\,A_\mu^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

где Q_μ — корреляционная матрица исходных данных.

Формула (3) позволяет оценивать любой уравненный элемент геодезической сети при коррелатном методе уравнивания. В ней второе слагаемое учитывает ошибки исходных данных посредством матрицы Q_μ.

Применим (3) к оценке точности геодезических сетей, изображенных на рисунке. Длины ходов приняты одинаковыми, а корреляционные матрицы измерений и исходных данных равны единичным матрицам разных порядков.

Ниже приведены условные уравнения, необходимые матрицы и результаты вычислений по (3).

Полигонометрия

$$(1)+(2)+(3)+(4)+(A_{a1}+1+2+3+4-A_{4в})=0, \tag{4}$$

$$-3(1)-2(2)-(3)+(x_1+\Delta x_{12}+\Delta x_{23}+\Delta x_{34}-x_4)=0; \tag{5}$$

$$(s_1)+(s_2)+(s_3)+(y_1+\Delta y_{12}+\Delta y_{23}+\Delta y_{34}-y_4)=0. \tag{6}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad AA^{т}=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(AA^{т})^{-1}=\begin{vmatrix} \frac{7}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}; \quad A_{\mu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$l^{т}=(1\,2\,3\,4\,s_1\,s_2\,s_3); \quad M^{т}=(x_a\,y_a\,x_1\,y_1\,x_4\,y_4\,x_в\,y_в);$$

$$V^{т}=\{(1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(s_1)\,(s_2)\,(s_3)\}.$$

$$Q_3=f^{т}(E-A^{т}(AA^{т})^{-1}A)f=? \qquad Q_3^{\mu}=f^{т}A^{т}(AA^{т})^{-1}A_{\mu}A_{\mu}^{т}(AA^{т})^{-1}Af=?$$

$f^{т}=(0010000)$, ...

$f^{т}A^{т}=(1-10)$, ...

$f^{т}A^{т}(AA^{т})^{-1}=\frac{1}{10}(410)$, ...

$$f^{т}A^{т}(AA^{т})^{-1}Af=\frac{3}{10}, \qquad f^{т}A^{т}(AA^{т})^{-1}A_{\mu}=\frac{1}{10}(1000-5040)$$

$$Q_3=1-\frac{3}{10}=0{,}70. \qquad Q_3^{\mu}=0{,}42.$$

Здесь A_{a1}, $A_{4в}$ — дирекционные углы линий a1 и 4в; (1), (2), ... (s_1), (s_2) — поправки в углы в радианах и поправки в стороны в относительной мере, например, $(s_1)/s_1$ или $(s_3)/s_3$; Δx, Δy — приращения координат; $f^{т}$ — коэффициенты весовой функции dF; т — знак транспонирования матриц; Q_3 и Q_3^{μ} — корреляционная матрица уравненного угла *3* и ее составляющая, обусловленная влиянием ошибок исходных данных.

Чтобы получить элементы матрицы A_{μ}, надо в свободных членах условных уравнений найти величины, зависящие от исходных данных. Если это функции нелинейные, то их необходимо разложить в ряды по формуле

$$F\{m_0+(m-m_0)\}=F(m_0)+(m-m_0)\frac{\partial F}{\partial m}, \tag{7}$$

где m_0 — приближенное значение m. Коэффициенты при m будут элементами матрицы A_μ. В качестве m принимают координаты исходных пунктов.

Отметим, что в первом условном уравнении дирекционные углы A_{a1}, $A_{4в}$ зависят от координат исходных пунктов; во втором уравнении, кроме x_1 и x_4, все приращения координат Δx зависят через посредство $\cos(A_{a1}+1+\ldots)$ от координат пунктов а и 1 и т. д.

Таким образом, общая ошибка уравненного угла *3* с учетом ошибок исходных координат

$$m_3=\sqrt{0{,}70+0{,}42}\,, \tag{8}$$

а аналогичная ошибка стороны s_2

$$m_{s_2}=\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{2}{9}}\,. \tag{9}$$

Нивелировка

$$V_2+V_3-V_5+(h_2+h_3-h_5)=0; \tag{10}$$

$$V_1+V_2+V_3+V_4+(H_a+h_1+h_2+h_3+h_4-H_в)=0; \tag{11}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&-1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix};\quad AA^т=\begin{pmatrix}3&2\\2&4\end{pmatrix};\quad (AA^т)^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4&-2\\-2&3\end{pmatrix};$$

$$A_\mu=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix};\quad A_\mu A_\mu^т=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcc}
 & Q_{h_2}=? & Q_{H_2}=? \\
f^т= & (01000) & (11000) \\
f^т A^т= & (11) & (12) \\
f^т A^т (AA^т)^{-1}= & \frac{1}{8}(21) & \frac{1}{8}(04) \\
f^т A^т (AA^т)^{-1} Af= & \frac{1}{8}(3) & \frac{1}{8}(8) \\
Q_F= & 1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8} & 2-1=1 \\
 & Q^\mu_{h_2}=? & Q^\mu_{H_2}=? \\
f^т A^т (AA^т)^{-1} A_\mu= & \frac{1}{8}(1-1) & \frac{1}{8}(4-4) \\
Q^\mu_F= & \frac{1}{32} & \frac{1}{2}
\end{array}$$

Здесь V_1, $V_2,\ldots$ — поправки в измеренные превышения; Q_{h_2}, Q_{H_2} — корреляционные матрицы уравненных превышений h_2 и высоты H_2; $Q^\mu_{h_2}$, $Q^\mu_{H_2}$ — корреляционные матрицы, учитывающие ошибки исходных высот. Итак, общие ошибки в превышении h_2 и высоте H_2 после уравнивания составляют

$$m_{h_2}=\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{1}{32}}; \quad m_{H_2}=\sqrt{1+\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

2. Параметрический метод. Поправки от уравнивания в измеренные величины в этом методе вычисляем [1, 2] в виде

$$V=-BC^{-1}B^{\mathrm{T}}Q^{-1}L+L, \tag{13}$$

где B — прямоугольная матрица коэффициентов уравнений поправок $BX+L=V$; L — матрица-столбец свободных членов, причем

$$L=M_0+B_\mu M-l; \tag{14}$$

M_0 — некоторая матрица-столбец; B_μ — матрица коэффициентов исходных данных; M — матрица-столбец исходных данных; $C=B^{\mathrm{T}}Q^{-1}B$.

Здесь также можно показать [1, 2], что корреляционная матрица любой линейной уравненной функции F определяется:

$$Q_F=f^{\mathrm{T}}(E-BC^{-1}B^{\mathrm{T}}Q^{-1})B_\mu Q_\mu B_\mu^{\mathrm{T}}(E-BC^{-1}B^{\mathrm{T}}Q^{-1})^{\mathrm{T}}f+$$

$$+f^{\mathrm{T}}BC^{-1}B^{\mathrm{T}}f; \quad f^{\mathrm{T}}=\left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\frac{\partial F}{\partial l_2}\cdots\frac{\partial F}{\partial l_n}\right). \tag{15}$$

Формула (15) позволяет оценивать любой уравненный элемент геодезической сети при параметрическом методе уравнивания. В ней первое слагаемое учитывает ошибки исходных данных посредством матрицы Q_μ.

Применим (15) к оценке точности рассматриваемых ранее геодезических сетей. Ниже приведены уравнения поправок параметрического метода, необходимые матрицы и результаты вычислений по (15).

Полигонометрия

$$(1)=-\xi_2+(A_{12}-A_{a1}-1),$$

$$(2)=2\xi_2-\xi_3+(A_{23}-A_{12}-2),$$

$$(s_1)=\eta_2+(\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}-s_1),$$

$$(3)=-\xi_2+2\xi_3+(A_{34}-A_{23}-3),$$

$$(s_2)=-\eta_2+\eta_3+\xi(\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}-s_2),$$

$$(4)=-\xi_3+(A_{4в}-A_{34}-4),$$

$$(s_3)=-\eta_3+(\sqrt{(x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2}-s_3).$$

$$
B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B^{\text{т}} B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
(B^{\text{т}} B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad B_{\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

	$Q_3 = ?$	$Q_{s_2} = ?$
$f^{\text{т}} B =$	(-1020)	$(0-101)$
$f^{\text{т}} B (B^{\text{т}} B)^{-1} =$	$\frac{1}{10}(1040)$	$\frac{1}{3}(0-101)$
$f^{\text{т}} B (B^{\text{т}} B)^{-1} B^{\text{т}} f =$	$\frac{7}{10}$	$\frac{2}{3}$
$Q_F =$	$0{,}70$	$\frac{2}{3}$

	$Q_3^{\mu} = ?$	$Q_{s_2}^{\mu} = ?$
$f^{\text{т}} B (B^{\text{т}} B)^{-1} B^{\text{т}} =$	$\frac{1}{10}(-1-27-4000)$	$\frac{1}{3}(0000-121)$
$\omega = f^{\text{т}} E - f^{\text{т}} B (B^{\text{т}} B)^{-1} B^{\text{т}} =$	$\frac{1}{10}(1234000)$	$\frac{1}{3}(0000111)$
$\omega \cdot B_{\mu} =$	$\frac{1}{10}(-10005040)$	$\frac{1}{3}(000-10100)$
$Q_F^{\mu} =$	0.42	$\frac{2}{9}$

ξ_i, η_i — поправки в координаты определяемых пунктов.

Нивелировка

$$V_1 = \delta H_1 + (H_1 - h_1 - H_a),$$

$$V_2 = -\delta H_1 + \delta H_2 + (H_2 - H_1 - h_2),$$

$$V_3 = -\delta H_2 + \delta H_3 + (-H_2 + H_3 - h_2),$$

$$V_4 = -\delta H_3 + (H_6 - H_3 - h_4),$$

$$V_5 = -\delta H_1 + \delta H_3 + (H_3 - H_1 - h_5).$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad B_\mu = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$B^{\text{т}} B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (B^{\text{т}} B)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B^{\text{т}}_\mu B_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} & Q_{h_2} = ? & Q_{H_2} = ? \\ f^{\text{т}} B = & (-110) & f^{\text{т}}_{H_2} = (010) \\ f^{\text{т}} B (B^{\text{т}} B)^{-1} = & \frac{1}{8}(-141) & \frac{1}{8}(484) \\ Q_F = & \frac{5}{8} & 1 \end{array}$$

Не делая подробных вычислений, напишем окончательный результат влияния ошибок исходных данных: $Q^{\mu}_{h_2} = 1/32$; $Q^{\mu}_{H_2} = 1/2$, что совпадает с оценкой коррелатного метода.

Список литературы: 1. *Большаков В. Д., Маркузе Ю. И.* Городская полигонометрия. — М.: Недра, 1979. 2. *Машимов М. М.* Уравнивание геодезических сетей. — М.: Недра, 1979.

Статья поступила в редколлегию 03. 10. 83