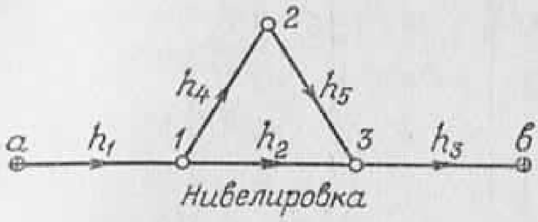
УДК 528.14/16

И. Ф. МОНИН

СОВМЕСТНОЕ УРАВНИВАНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ И ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Современная теория математической обработки измерений в геодезических сетях [1, 2] позволяет находить поправки в результате уравнивания не только в измеренные величины, но и в исходные данные. Рассмотрим совместное уравнивание измерений и исходных данных коррелатным и параметрическим методами и приведем простейший пример.



Нивелирная сеть.

1. **Коррелатный метод.** Полагая известным корреляционные матрицы измерений Q и исходных данных Q_μ, напишем функцию Лагранжа

$$\Phi = V^\tau Q^{-1} V + \delta M^\tau Q_\mu^{-1} \delta M - K^\tau (AV + A_\mu \delta M + W), \qquad (1)$$

где в условном уравнении классического коррелатного метода прибавлено слагаемое, учитывающее поправки δM исходных данных; остальные обозначения такие же, как в [2].

Возьмем производные от функции Φ по неизвестным поправкам и приравняем их к нулю $\partial\Phi/\partial V = V^\tau Q - K^\tau A = 0$, $\partial\Phi/\partial\delta M = \delta M^\tau Q_\mu^{-1} - K^\tau A_\mu = 0$. Определив из полученных равенств V и δM и подставив их в условное уравнение, получим нормальное уравнение. Решая его, найдем вектор коррелат, а потом поправки в измерения и исходные данные:

$$V = -QA^\tau N^{-1} W; \quad (2) \qquad \delta M = -Q_\mu A_\mu^\tau N^{-1} W, \qquad (3)$$

где

$$N = AQA^\tau + A_\mu Q_\mu A_\mu^\tau; \; W = M_0 + Al + A_\mu M;$$

$$AV + A_\mu \delta M + W = 0;$$

M — матрица-столбец исходных данных; M_0 — некоторая матрица-столбец; A_μ — матрица коэффициентов исходных данных.

Формулы (2) и (3) позволяют вычислять поправки в измеренные величины l и в исходные данные M. Выполним теперь оценку точности уравненной величины $l_1 = l + V = l - QA^\tau N^{-1} W$. Из полученного выражения по известным правилам [1, 2] найдем корреляционную матрицу уравненной величины

$$Q_{l_1} = (E - QA^\tau N^{-1} A)\, Q\, (E - QA^\tau N^{-1} A)^\tau + QA^\tau N^{-1} N_\mu N^{-1} AQ,$$

$$N_\mu = A_\mu Q_\mu A_\mu^\tau, \qquad (4)$$

которая решает задачу об оценке точности.

В качестве примера оценим уравненное превышение h_2 и уравненную высоту H_2 нивелирной сети, изображенной на рисунке. В данной сети два исходных пункта, три определяемых и пять измеренных превышений. Пусть корреляционные матрицы измерений и исходных данных равны единичным матрицам пятого и второго порядков. Ниже приведены условные уравнения, необходимые матрицы и результаты вычислений:

$$V_2 - V_4 - V_5 + (h_2 - h_4 - h_5) = 0;$$
$$V_1 + V_2 + V_3 + (H_a + h_1 + h_2 + h_3 - H_b) = 0;$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad AA^т = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_\mu A_\mu^т = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \; N = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}; \; N^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q_F = rQr^т + f^т QA^т N^{-1} N_\mu N^{-1} AQf, \tag{5}$$

$$r = f^т (E - QA^т N^{-1} A), \quad f^т = \left(\frac{\partial F}{\partial l_1} \frac{\partial F}{\partial l_2} \cdots \frac{\partial F}{\partial l_n} \right).$$

Здесь F — произвольная линейная функция уравненных величин.

	$Q_{h_2} = ?$	$Q_{H_2} = ?$
$f^т =$	(01000)	(10010)
$f^т A^т =$	(11)	(-11)
$f^т A^т N^{-1} =$	$\frac{1}{14}(42)$	$\frac{1}{14}(-64)$
$f^т A^т N^{-1}A =$	$\frac{1}{14}(262-4-4)$	$\frac{1}{14}(4-2466)$
$r =$	$\frac{1}{14}(-28-244)$	$\frac{1}{14}(102-48-6)$
$rr^т =$	$\frac{26}{49} \approx 0{,}53$	$\frac{220}{14^2} \approx 1{,}122$
$f^т A^т N^{-1} N_\mu N^{-1} Af =$	$\frac{2}{49} \approx 0{,}04$	$\frac{8}{49} \approx 0{,}16$
Q_F	0,57	1,28

2. **Параметрический метод.** В этом случае уравнение поправок, как легко установить, записывается так:

$$BX + B_\mu \delta M + L = V,$$
$$L = M_0 + B_\mu M - l, \tag{6}$$

где B, B_μ — прямоугольные матрицы коэффициентов при поправках X в координаты определяемых пунктов и поправках δM в координаты исходных пунктов; L — матрица-столбец свободных членов; M_0 — некоторая матрица-столбец.

Так как измерения в геодезической сети не зависят от исходных данных, функцию Φ запишем

$$\Phi = V^{\text{т}} Q^{-1} V + \delta M^{\text{т}} Q_{\mu}^{-1} \delta M =$$
$$= (BX + B_{\mu} \delta M + L)^{\text{т}} Q^{-1} (BX + B_{\mu} \delta M + L) + \delta M^{\text{т}} Q_{\mu}^{-1} \delta M. \quad (7)$$

Найдем производные от Φ по неизвестным поправкам X и δM и приравняем полученные выражения к нулю. После некоторых преобразований имеем нормальные уравнения

$$N_{11} X + N_{12} \delta M + B^{\text{т}} Q^{-1} L = 0,$$
$$N_{12}^{\text{т}} X + (N_{22} + Q_{\mu}^{-1}) \delta M + B_{\mu}^{\text{т}} Q^{-1} L = 0,$$

где

$$N_{11} = B^{\text{т}} Q^{-1} B; \quad N_{12} = B^{\text{т}} Q^{-1} B_{\mu}; \quad N_{22} = B_{\mu}^{\text{т}} Q^{-1} B_{\mu},$$

решая которые, получаем

$$X = -N_{11}^{-1} (B^{\text{т}} - N_{12} N^{-1} R^{\text{т}}) Q^{-1} L; \quad (8) \quad \delta M = -N^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1} L,$$

где

$$N = Q_{\mu}^{-1} + N_{22} - N_{12}^{\text{т}} N_{11}^{-1} N_{12}; \quad R^{\text{т}} = B_{\mu}^{\text{т}} - N_{12}^{\text{т}} N_{11}^{-1} B^{\text{т}}. \quad (9)$$

По (8) и (9) вычисляют поправки в приближенные координаты определяемых и исходных пунктов при параметрическом уравнивании.

Запишем корреляционную матрицу уравненной величины

$$l_1 = l + V = l - BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} Q^{-1} L - RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1} L + L.$$

Не приводя подробных преобразований, напишем окончательную формулу, определяющую корреляционную матрицу уравненной величины l_1,

$$Q_{l_1} = BN_{11}^{-1} B^{\text{т}} + RN^{-1} R^{\text{т}} Q^{-1} RN^{-1} R^{\text{т}}. \quad (10)$$

Чтобы проще вычислять второе слагаемое в (10), заметим, что

$$R^{\text{т}} Q^{-1} R = N_{22} - N_{12}^{\text{т}} N_{11}^{-1} N_{12}. \quad (11)$$

Таким образом, корреляционная матрица Q_{l_1} надежно характеризует точность уравненных измерений при параметрическом методе обработки. Для примера оценим уравненное превышение h_2 и уравненную высоту H_2. Корреляционные матрицы измерений и исходных данных принимаем прежними. Ниже приведены уравнения поправок параметрического метода, необходимые матрицы и результаты вычислений:

$$V_1 = \delta H_1 + (H_1 - H_a - h_1),$$
$$V_2 = -\delta H_1 + \delta H_3 + (H_3 - H_1 - h_2),$$

$$V_3 = -\delta H_3 + (H_b - H_3 - h_3),$$
$$V_4 = -\delta H_1 + \delta H_2 + (H_2 - H_1 - h_4),$$
$$V_5 = -\delta H_2 + \delta H_3 + (H_3 - H_2 - h_5);$$

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}; \quad B_\mu = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$B^\tau B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (B^\tau B)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$B_\mu^\tau B_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad N = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}; \quad N_{12}^\tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$N_{22} - N_{12}^\tau N_{11}^{-1} N_{12} = \frac{3}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BN_{11}^{-1} B^\tau = \frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 5 & -2 & -3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & -3 & 5 \end{Vmatrix};$$

$$R = \frac{1}{8}\begin{Vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \\ -3 & 3 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}; \quad BN_{11}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -4 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$BN_{11}^{-1} N_{12} = \frac{1}{8}\begin{Vmatrix} -5 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & 5 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}; \quad RN^{-1} = \frac{1}{14}\begin{Vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \\ -3 & 3 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$RN^{-1}R^{\mathrm{T}} = \frac{1}{4.14}\begin{vmatrix} 9 & 6 & 9 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 6 & 2 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Q_{h_2} = \frac{1}{2} + \frac{6}{14^2}, \quad Q_{H_2} = 1 + \frac{24}{14^2}.$$

$$Q_F = f^{\mathrm{T}}(BN_{11}^{-1}B^{\mathrm{T}} + RN^{-1}R^{\mathrm{T}} \cdot RN^{-1}R^{\mathrm{T}})\,f,$$

	$Q_{h_2} = ?$	$Q_{H_2} = ?$
$f^{\mathrm{T}} =$	(01000)	(10010)
$f^{\mathrm{T}}BN_{11}^{-1}B^{\mathrm{T}} =$	$\frac{1}{8}(-24-222)$	$\frac{1}{8}(40-54-4)$
$f^{\mathrm{T}}BN_{11}^{-1}B^{\mathrm{T}}f =$	$\frac{1}{2}$	1
$f^{\mathrm{T}}RN^{-1}R^{\mathrm{T}} =$	$\frac{1}{4.14}(64622)$	$\frac{1}{4.14}(1281244)$
$f^{\mathrm{T}}RN^{-1}R^{\mathrm{T}} \cdot RN^{-1}R^{\mathrm{T}}f =$	$\frac{96}{4^2.14^2}$	$\frac{24}{14^2}$

Полученные оценки приближенные. В (10) не принималось во внимание слагаемое, зависящее от корреляционной матрицы Q_μ ошибок исходных данных.

Список литературы: 1. *Большаков В. Д., Маркузе Ю. И.* Городская полигонометрия. — М.: Недра, 1979. 2. *Машимов М. М.* Уравнивание геодезических сетей. — М.: Недра, 1979.

Статья поступила в редколлегию 03. 10. 83