ЛПИ. Сер. геодезическая, 1962, вып. 82, № 7. 4. *Островский А. Л.* К вопросу программы угловых измерений при свето- и радиодальномерной полигонометрии. — Инженерная геодезия, 1964, № 1. 5. *Островский А. Л., Тартачинский Р. М.* Опыт применения программы угловых измерений, симметричной относительно моментов изотермии воздушных масс, в южном степном районе. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1965, вып. 3. 6. *Островский А. Л.* Геодезический метод построения симметричной программы наблюдения горизонтальных углов. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1967, вып. 6. 7. *Яковлев Н. В.* К теории и практике учета суточного хода рефракции при угловых измерениях и азимутальных определениях в геодезических сетях. — Геодезия и картография, 1967, № 8.

Статья поступила в редколлегию 14. 12. 83

УДК 528.23

А. Е. ФИЛИППОВ

О ТОЧНОЙ ПЕРЕДАЧЕ ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА И УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА ПО СИНХРОННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ СВЕТИЛ В ДВУХ ПУНКТАХ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для точной передачи дирекционного угла ($m_\alpha < 0{,}5''$) и определения приращений уклонений отвеса предложен [1—3] способ синхронных наблюдений светил в двух пунктах земной поверхности, позволяющий, не зная точные геодезические координаты пунктов, получать приращения истинных уклонений отвеса между этими пунктами. Это, однако, означает возможность (не существующую в действительности) передачи геодезических координат по результатам одних лишь угловых измерений (без использования измерений линейных).

Чтобы устранить указанное противоречие, приведем вывод уравнений способа, применяя в основном обозначения [1—3], но отказываясь от каких-либо иных геометрических построений, кроме построений на вспомогательной сфере. Линейные элементы и данные о проекции Гаусса используем только для вычисления поправок, связанных с переходом на поверхность эллипсоида и на плоскость проекции.

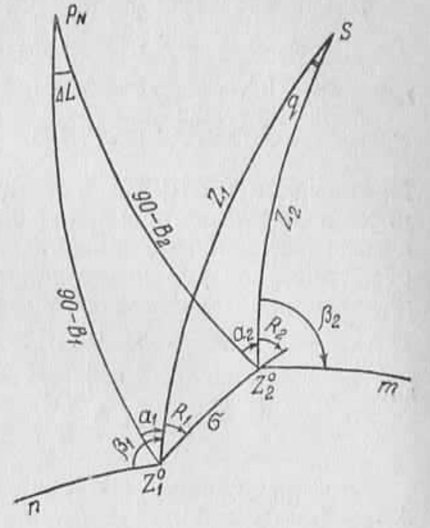
Пусть в пункте P_1 земной поверхности с известными геодезическими координатами B_1, L_1 и составляющими ξ, η_1 относительного уклонения отвеса известен дирекционный угол α_1 направления на смежный пункт N. Необходимо определить дирекционный угол α_2 направления из пункта P_2 на смежный пункт M по синхронным измерениям на пунктах P_1 и P_2 зенитных расстояний какой-либо звезды и горизонтальных углов между направлениями на соответствующие смежные пункты и этой звездой. Предполагаем известными приближенные значения (с точностью до 0,1′) геодезических координат пункта P_2. Считаем также, что разности геодезических координат точек P_2 и P_1 не превышают 1,5°, такого же порядка

удаления этих точек от осевого меридиана соответствующей зоны проекции Гаусса.

Получим уравнение связи между значениями дирекционных углов α_2 и α_1, допуская, что известны геодезические координаты B_2, L_2 точки P_2.

Обозначим через a_{1n} и a_{2m} соответственно геодезические азимуты направлений P_1N и P_2M (см. рисунок). Тогда

$$\alpha_1 = a_{1n} - \gamma_1 - \delta_1 - \delta_1^H + \delta_1^G = a_{1n} - \gamma_1 + \Sigma_1,$$
$$\alpha_2 = a_{2m} - \gamma_2 - \delta_2 + \delta_2^H + \delta_2^G = a_{2m} - \gamma_2 + \Sigma_2. \quad (1)$$



Построения на вспомогательной сфере: Z_1^0 и Z_2^0 — геодезические зениты точек P_1 и P_2; P_N — северный полюс Мира; S — положение наблюдаемой звезды; m и n — точки пересечения со сферой прямых, параллельных прямым P_2M и P_1N соответственно; a_1, a_2, Z_1, Z_2 — геодезические азимуты и зенитные расстояния звезды; β_1, β_2 — углы между нормальными плоскостями направлений на пункты N и M и на звезду.

Здесь γ_1 и γ_2 — гауссовы сближения меридианов в точках P_1 и P_2; δ_i, δ_i^H, δ_i^G — соответственно поправки за кривизну изображений геодезических линий на плоскости, за высоту визирных целей и за переход от нормальных сечений к геодезическим линиям. Величины Σ_1 и Σ_2 можно считать известными.

На основании (1) имеем

$$\alpha_2 = \alpha_1 + (a_{2m} - a_{1n}) - (\gamma_2 - \gamma_1) + \Sigma_2 - \Sigma_1. \quad (2)$$

Из рисунка следует

$$a_{2m} - a_{1n} = (a_2 - a_1) + \beta_1 + \beta_2. \quad (3)$$

Вводя обозначения $\Delta_{12} = R_2 - R_1$, $\gamma_{12} = (a_2 + R_2) - (a_1 + R_1) = (a_2 - a_1) + \Delta_{12}$ и принимая во внимание (3), приведем (2) к виду

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \gamma_{12} - (\gamma_2 - \gamma_1) - \Delta_{12} + \beta_1 + \beta_2 + \Sigma_2 - \Sigma_1. \quad (4)$$

Пусть φ_1, λ_1, φ_2, λ_2 — астрономические координаты пунктов; P_1 и P_2, z_1, z_2, z_{1n}, z_{2m} — астрономические зенитные расстояния звезды и пунктов N, M. Сумма $\beta_1 + \beta_2$ углов между нормальными плоскостями связана с суммой $\beta_1' + \beta_2'$ горизонтальных углов соотношением

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta_1' + \beta_2' + (\eta_1 \cos a_1 - \xi_1 \sin a_1) \operatorname{ctg} z_1 - (\eta_2 \cos a_2 - \xi_2 \sin a_2) \operatorname{ctg} z_2 + \Sigma_2' - \Sigma_1', \quad (5)$$

где $\xi_i=\varphi_i-B_i$, $\eta_i=(\lambda_i-L_i)\cos B_i$ — составляющие относительного уклонения отвеса.

Поправки $\Sigma_2'=(\eta_2 \cos a_{2m}-\xi_2 \sin a_{2m}) \operatorname{ctg} z_{2m}$, $\Sigma_1'=(\eta_1 \cos a_{1n}-\xi_1 \sin a_{1n}) \operatorname{ctg} z_{1n}$ для направлений на земные предметы при малых значениях ξ_1 и η_i пренебрегаемы. Величину $\Delta_1=(\eta_1 \cos a_1-\xi_1 \sin a_1) \operatorname{ctg} z_1$ вычисляем достаточно точно с использованием приближенно измеренного зенитного расстояния z_1 и $a_1 \approx a_{1n}+\beta_1'$.

Уравнение (4) с учетом (5) принимает вид

$$\alpha_3=\alpha_1+f-\Delta_{12}-(\eta_2 \cos a_2-\xi_2 \sin a_2) \operatorname{ctg} z_2+\Sigma, \tag{6}$$

где

$$f=\gamma_{12}-(\gamma_2-\gamma_1); \quad \Sigma=\Sigma_2-\Sigma_1+\Sigma_2'-\Sigma_1'+\Delta_1$$

Принимая $\alpha_2=\alpha_2^0+\Delta\alpha_2$, где α_2^0 — приближенное значение дирекционного угла направления P_2M, и обозначая через v поправку суммы измеренных горизонтальных углов, получим следующее параметрическое уравнение поправок, соответствующее синхронному наблюдению одной звезды на пунктах P_1 и P_2.

$$\Delta\alpha_2+(\eta_2 \cos a_2-\xi_2 \sin a_2) \operatorname{ctg} z_2+l=v, \tag{7}$$

где

$$l=\alpha_2^0-\alpha_1+\Delta_{12}-f-\beta_1'-\beta_2'-\Sigma. \tag{8}$$

При вычислении свободного члена l при $\Delta B \approx \Delta L \approx 1{,}5°$, где $\Delta B=B_2-B_1$ и $\Delta L=L_2-L_1$, в приближенных формулах необходимо учитывать члены третьего порядка малости относительно ΔB, ΔL.

Величину Δ_{12} определяем следующей совокупностью формул, вытекающих из сферического треугольника P_1P_2S:

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta_{12}}{2}=\operatorname{tg}\frac{q}{2}\cos Z_m \sec\frac{\Delta Z}{2},$$

$$\sin q=\sin\sigma \sin R_1 \operatorname{cosec} Z_2=\sin\sigma \sin R_2 \operatorname{cosec} Z_1,$$

$$R_1=A_1-a_1, \quad R_2=A_2-a_2, \quad Z_m=\frac{1}{2}(Z_1+Z_2),$$

$$\Delta Z=Z_2-Z_1, \quad a_1=a_{1n}+\beta_1. \tag{9}$$

Сферическую дугу σ и ее азимуты A_1 и A_2 следует вычислять путем решения обратной геодезической задачи на сфере (а не на эллипсоиде, как это делает автор). Для этого можно использовать формулы со средними аргументами:

$$A_2-A_1=\gamma_{12}=\Delta L \sin B_m\left(1+\frac{\Delta B^2}{8}+\frac{\Delta L^2 \cos^2 B_m}{12}\right),$$

$$\sigma \cos A_m=\Delta B\left(1-\frac{\Delta L^2}{12}-\frac{\Delta L^2 \sin^2 B_m}{24}\right),$$

$$\sigma \sin A_m=\Delta L \cos B_m\left(1+\frac{\Delta B^2}{24}-\frac{\Delta L^2 \sin^2 B_m}{24}\right),$$

$$B_m=\frac{1}{2}(B_1+B_2), \quad A_m=\frac{1}{2}(A_1+A_2). \tag{10}$$

Для вычисления $f=\gamma_{12}-(\gamma_2-\gamma_1)$ используем известную из сфероидической геодезии формулу

$$\gamma_i=(L_i-L_0)\sin B_i+\sin B_i \cos^2 B_i (1+3\eta_i^2+2\eta_i^4)\frac{(L_i-L_0)^3}{3}+\dots \tag{11}$$

и первое из выражений (10), которое с точностью до членов третьего порядка малости относительно ΔB, ΔL совпадает с точной формулой

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma_{12}}{2}=\operatorname{tg}\frac{\Delta L}{2}\sin B_m \sec\frac{\Delta B}{2}.$$

Учитывая (10), (11) и опустив пренебрегаемо малые члены, содержащие $\eta_i=e'\cos B_i$, получаем

$$f=(L_0-L_m)\cos B_m \Delta B+\frac{\Delta L\,\Delta B^2}{4}\sin B_m+$$

$$+\left[\Delta L^3-4(L_2-L_0)^3+4(L_1-L_0)^3\right]\frac{\sin B_m \cos B_m}{12}, \tag{12}$$

где $L_m=\frac{1}{2}(L_1+L_2)$; L_0 — долгота осевого меридиана зоны проекции Гаусса.

В (9), по которым вычисляется Δ_{12}, фигурируют геодезические зенитные расстояния звезды. Замена последних измеренными астрономическими вызывает появление в (7) члена

$$\delta\Delta_{12}^z \approx -\frac{\sigma}{2\sin^2 z_m}\sin(A_m-a_m)\left[\Theta_1 \cos(Q_1-a_1)+\right.$$

$$\left.+\Theta_2 \cos(Q_2-a_2)+\delta z_1+\delta z_2\right], \tag{13}$$

так как $\Delta_{12} \approx \sigma \sin(A_m-a_m)\operatorname{ctg} z_m$.

В (13) θ_i, Q_i соответственно полное уклонение отвеса и его азимут в пункте P_i; δz_i — случайная ошибка измеренного зенитного расстояния ($i=1, 2$); $a_m=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$.

Как следует из (13), пренебрежение величинами θ_1 и θ_2 приводит к появлению в свободном члене уравнения (7) малой систематической ошибки порядка $\sigma\theta$, зависящей от азимута наблюдаемой звезды.

С ошибками δz_i связано появление в l случайной ошибки, среднее квадратическое значение m_Δ которой составляет $m_\Delta=$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sin z_m}\left|\sin(A_m-a_m)\right| m_z,$$

где m_z — средняя квадратическая ошибка измеряемого зенитного расстояния. При $\sigma=1°$ и $z_m=45°$ максимальное значение m_Δ составит $0{,}025 m_z$. В этом случае при $m_\Delta<0{,}2''$ значение m_z не должно превышать $8''$. Этот подсчет показывает, что зенитные расстояния при больших значениях $\sigma\sin(A_m-a_m)$ должны измеряться достаточно точно, чтобы можно было пренебречь влиянием их ошибок на свободный член по сравнению с влиянием ошибки суммы горизонтальных углов ($m\approx 2''$).

Для совместного определения трех неизвестных $\Delta\alpha_2$, ξ_2 (или φ_2) и η_2 (или λ_2) в (7) необходимо выполнить на обоих пунктах синхронные наблюдения минимум трех звезд в различных вертикалах.

В [4] приведены результаты детального исследования азимутальных способов астрономических определений геодезического азимута (или дирекционного угла), составляющих уклонений отвеса (или широты и долготы) и выгоднейших условий наблюдений. Сделанные выводы полностью применимы к (7), если не учитывать влияния ошибок измеряемых зенитных расстояний на свободный член этого уравнения.

Приведенный выше вывод (7) предполагал известными точные значения геодезических координат как пункта P_1, так и пункта P_2. Допустим теперь, что l' — значение свободного члена, вычисленное с приближенными координатами B_2^0, L_2^0 пункта P_2, снятыми с точностью до $0{,}1'$ с топографической карты. Нетрудно убедиться, что в (8) для свободного члена все величины, кроме Δ_{12}, не зависят (или практически не зависят) от поправок δB_2, δL_2 принятых значений геодезических координат. Поэтому $l=l'+$ $+\delta\Delta_{12}$.

Дифференцируя по B_2 и L_2 главный член выражения для

$$\Delta_{12}\approx(\Delta L\cos B_2\cos a_2-\Delta B\sin a_2)\operatorname{ctg} z_2\approx$$
$$\approx(\Delta L\cos B_1\cos a_1-\Delta B\sin a_1)\operatorname{ctg} z_1,$$

получаем с погрешностью порядка $\sigma\delta B_2$, $\sigma\delta L$

$$\delta\Delta_{12}=(\delta L_2\cos B_2^0\cos a_2-\delta B_2\sin a_2)\operatorname{ctg} z_2.$$

Тот же результат можно получить, дифференцируя точные формулы (9). Уравнение (7) принимает вид

$$\Delta\alpha_2+(\eta_2^0\cos a_2-\xi_2^0\sin a_2)\operatorname{ctg} z_2+l'=v, \qquad (14)$$

где $\eta_2^0=(\lambda_2-L_2^0)\cos B_2^0$, $\xi_2^0=\varphi_2-B_2^0$ — составляющие «смешанного» или «условного» [4] уклонения отвеса в пункте P_2. Величину $\delta\Delta_{12}$ Э. А. Могилевский в своих выводах не учитывает. Из обработки синхронных наблюдений на двух пунктах P_1 и P_2 звезд в различных вертикалях можно получить независимо от малых

ошибок геодезических координат второго пункта разность $\alpha_2-\alpha_1$ дирекционных углов и астрономические координаты φ_2, λ_2 этого пункта. Что же касается уклонений отвеса ξ_2, η_2, то для вывода их истинных значений необходимо знать точные геодезические координаты B_2, L_2.

Если ошибочны геодезические координаты двух пунктов и неизвестны ξ_1, η_1, то (7) примет вид

$$\Delta\alpha_2-[(\lambda_1-L_1^0)\cos B_1^0\cos a_1-(\varphi_1-B_1^0)\sin a_1]\operatorname{ctg} z_1+$$
$$+[(\lambda_2-L_2^0)\cos B_2^0\cos a_2-(\varphi_2-B_2^0)\sin a_2]\operatorname{ctg} z_2+l''=v,$$

где

$$l''=\alpha_2^0-\alpha_1+\Delta_{12}-f-\beta_1'-\beta_2'-(\Sigma_2-\Sigma_1+\Sigma_2'-\Sigma_1'). \qquad (15)$$

Использование при вычислении Δ_{12} вместо $a_1=a_{1m}+\beta_1$ приближенного значения $a_1\approx a_{1n}+\beta_1'$ приведет к ошибке порядка $\sigma\theta_1$ в свободном члене.

С такой же погрешностью можно вместо (15) записать

$$\Delta\alpha_2=[(\eta_2^0-\eta_1^0)\cos a_m-(\xi_2^0-\xi_1^0)\sin a_m]\operatorname{ctg} z_m+l''=v,$$

где

$$\eta_2^0-\eta_1^0=[(\lambda_2-\lambda_1)-(L_2^0-L_1^0)]\cos B_m^0;$$
$$\xi_2^0-\eta_1^0=(\varphi_2-\varphi_1)-(B_2^0-B_1^0). \qquad (16)$$

В этом случае независимо от малых ошибок геодезических координат определяются разность дирекционных углов и разности атрономических координат пунктов или разности условных уклонений отвеса.

В уравнениях из [1—3], аналогичных (14) или (16), фигурируют не условные, а истинные уклонения отвеса.

Заметим также, что для вычисления величины Δ_{12} достаточно знать одно зенитное расстояние, если угол R_1 получать не из решения сферического треугольника $Z_1^0 Z_2^0 S$ по трем сторонам Z_1, Z_2, σ, а находить по формуле $R_1=A_1-(a_{1n}+\beta_1)$, как в [2, 3] и как сделано выше. Добавив к (9) выражение $\cos Z_1=\cos Z_2\cos\sigma-$ $-\sin Z_2\sin\sigma\cos(R_1+\Delta_{12})$, получим значение Δ_{12} последовательными приближениями, используя только зенитное расстояние Z_2.

Список литературы: 1. *Могилевский Э. А.* О способе передачи дирекционного угла посредством синхронных наблюдений небесного светила. — Геодезия и картография, 1977, № 7. 2. *Могилевский Э. А.* Определение приращений уклонения отвеса по синхронным наблюдениям светил в двух пунктах земной поверхности. — Исследования по геодезии, аэрофотосъемке и картографии, 1978, вып. 3. 3. *Могилевский Э. А.* О высокоточной передаче дирекционного угла астрономическим путем. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1979, № 6. 4. *Уралов С. С.* Курс геодезической астрономии. — М.: Недра, 1980.

Статья поступила в редколлегию 01. 12. 83