УДК 528.236:517.54

В. Г. КИРИЛЛОВ

Кадиевский филиал Коммунарского горнометаллургического института

К ВОПРОСУ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ В СПУТНИКОВОЙ ГЕОДЕЗИИ

Развитие спутниковой геодезии сделало возможными геодезические связи изолированных систем координат разных материков. В связи с этим актуальной является задача определения параметров линейного преобразования и связи прямоугольных пространственных координат при переходе из одной системы в другую.

Рассмотрим конформный переход от одной квазигеоцентрической системы координат к другой или к единой геоцентрической системе координат и исследуем критерии для оценки конформности преобразования координат в пространстве. Пусть даны две пространственные квазигеоцентрические прямоугольные системы координат: X', Y', Z' и X, Y, Z. Поскольку они обе ортогональны, матрица A перехода также должна быть ортогональной * [3]:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = mA \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta Z_0 \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где m — линейный масштаб; A — ортогональная матрица поворота; $\delta X_0 \delta Y_0 \delta Z_0$ — сдвиги по осям координат.

Если повороты выполнены последовательно вокруг осей X, Y и Z на углы ψ, ε и ω, то, как известно [1], матрица поворота A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon\cos\psi & \cos\varepsilon\sin\psi & +\sin\varepsilon \\ (-\cos\omega\sin\psi - \sin\omega\cos\psi\sin\varepsilon) & (\cos\omega\cos\psi + \sin\omega\sin\psi\sin\varepsilon) & \sin\omega\cos\varepsilon \\ (-\cos\omega\cos\psi\sin\varepsilon + \sin\omega\sin\psi) & (\cos\omega\sin\varepsilon\sin\psi - \sin\omega\cos\psi) & \cos\omega\cos\varepsilon \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

После разложения синусов и косинусов в формуле (2) в ряды получим, удерживая члены II порядка:

$$A' = \begin{bmatrix} (1-\varepsilon^2/2-\psi^2/2+\ldots) & +\psi+\ldots & -\varepsilon+\ldots \\ -(\psi+\omega\varepsilon+\ldots) & (1-\psi^2/2-\omega^2/2+\ldots) & +\omega+\ldots \\ (\varepsilon+\omega\psi+\ldots) & (-\omega+\varepsilon\psi+\ldots) & (1-\omega^2/2-\varepsilon^2/2+\ldots) \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

* Если во всех точках и по всем направлениям $m = \text{const}$, то преобразование называют подобным [3] или линейным конформным [7]. Оно характеризуется семью параметрами (δX_0, δY_0, δZ_0, m, ε, φ, ω). При $m = 1$ преобразование ортогонально. При конформном изображении подобие сохраняется лишь в бесконечно малых частях.

При малых углах поворота, когда можно пренебречь членами второго порядка, матрицу A' (3) запишем так же, как в работе [1]

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & \psi & +\varepsilon \\ -\psi & 1 & \omega \\ \varepsilon & -\omega & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Чтобы выяснить, можно ли заменить строгое преобразование с матрицей (2) приближенным (линейным) преобразованием с матрицей (4), вычтем из A' матрицу A'' и получим для простейшего случая, когда $\varepsilon=\psi=\omega=\Delta\alpha$:

$$\delta A = A' - A'' = \begin{bmatrix} -\Delta\alpha^2 & 0 & 0 \\ -\Delta\alpha^2 & -\Delta\alpha^2 & 0 \\ +\Delta\alpha^2 & +\Delta\alpha^2 & -\Delta\alpha^2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

При этом погрешности координат от замены «точной» матрицы поворота (2) «приближенной» (4) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \delta X &= -\Delta\alpha^2 X; \\ \delta Y &= -\Delta\alpha^2 X - \Delta\alpha^2 Y; \\ \delta Z &= +\Delta\alpha^2 X + \Delta\alpha^2 Y - \Delta\alpha^2 Z. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если потребовать, чтобы погрешности не превышали 1 м * и учесть, что координаты пунктов меньше $7{,}0\cdot 10^6$ м, то элементы матрицы (5) не будут превышать $1\cdot 10^{-7}$, откуда углы перекоса $\Delta\alpha < 1'$.

В связи с этим при переходе от одних прямоугольных квазигеоцентрических систем к другим и к единой геоцентрической системе можно применять уравнение (1) с матрицей (4), так как углы перекоса ψ, ω, ε между осями координат этих систем, как правило, не превышают $\pm 5 \ldots \pm 10''$ [4].

Отметим, что Э. Михаэль в 1964 г. [6] и А. В. Буткевич в 1963 г., см. [2], рассматривали «конформные» отображения трехмерного пространства X, Y, Z в пространство X', Y', Z', задаваемое уравнениями вида:

$$X' = f_1(X, Y, Z); \; Y' = f_2(X, Y, Z); \; Z' = f_3(X, Y, Z). \tag{7}$$

При этом под условиями «конформности» таких отображений они понимали известные условия Коши-Римана, написанные для каждой координатной плоскости:

$$\frac{\partial X'}{\partial X} = \frac{\partial Y'}{\partial Y} = \frac{\partial Z'}{\partial Z}, \; (8) \quad \frac{\partial X'}{\partial Y} = -\frac{\partial Y'}{\partial X}; \frac{\partial X'}{\partial Z} = -\frac{\partial Z'}{\partial X}; \frac{\partial Y'}{\partial Z} = -\frac{\partial Z'}{\partial Y}. \quad (9)^{**}$$

---

* Такая точность достаточна, так как погрешности спутниковых методов связи координат составляют несколько метров [4].

** При выполнении условий (8), (9) сохраняются не пространственные углы, а их проекции на координатные плоскости [2], [6].

Легко убедиться, что уравнения (1) с «приближенной матрицей» A'' (4) удовлетворяют условиям (8), (9), а с «точной матрицей» A' (2) — не удовлетворяют.

Е. Хедрик и Л. Инголд [5] предложили в 1925 г. для оценки аналитичности функций в трехмерном пространстве (т. е. «конформности» преобразования) условия:

$$\left.\begin{aligned}
&X'_X=\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix}Y'_Y Z'_Y\\ Y'_Z Z'_Z\end{vmatrix};\ Y'_X=\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix}Z'_Y X'_Y\\ Z'_Z X'_Z\end{vmatrix};\ Z'_X=\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix}X'_Y Y'_Y\\ X'_Z Y'_Z\end{vmatrix};\\
&X'_Y=\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix}Y'_Z Z'_Z\\ Y'_X Z'_X\end{vmatrix};\ Y'_Y=\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix}Z'_Z X'_Z\\ Z'_X X'_X\end{vmatrix};\ Z'_Y=\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix}X'_Y Y'_Z\\ X'_X Y'_X\end{vmatrix};\\
&X'_Z=\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix}Y'_X Z'_X\\ Y'_Y Z'_Y\end{vmatrix};\ Y'_Z=\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix}Z'_X X'_X\\ Z'_Y X'_Y\end{vmatrix};\ Z'_Z=\frac{1}{\sqrt{E}}\begin{vmatrix}X'_X Y'_X\\ X'_Y Y'_Y\end{vmatrix},
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

где
$$E=X'^2_X+X'^2_Y+X'^2_Z. \quad (11)$$

Как известно [7], матрица конформного преобразования в пространстве должна быть ортогональной. На основании этого можно иным способом вывести условия конформности в трехмерном пространстве. Формулы (1) запишем так:

$$\left.\begin{aligned}
X' &= a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z+\delta X_0;\\
Y' &= a_{21}X+a_{22}Y+a_{23}Z+\delta Y_0;\\
Z' &= a_{31}X+a_{32}Y+a_{33}Z+\delta Z_0.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Матрица этого преобразования имеет вид:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X'_X X'_Y X'_Z\\ Y'_X Y'_Y Y'_Z\\ Z'_X Z'_Y Z'_Z\end{bmatrix}. \quad (13)$$

Но A является матрицей линейного конформного преобразования только тогда, когда обратная матрица A^{-1} подобна транспонированной матрице A^T, т. е.

$$\lambda=\begin{bmatrix}\frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta}\\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta}\\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\, a_{21}\, a_{31}\\ a_{12}\, a_{22}\, a_{32}\\ a_{13}\, a_{23}\, a_{33}\end{bmatrix}, \quad (14)$$

где λ — множитель, Δ — определитель преобразования.

Однако определитель матрицы (13) равен кубу масштаба преобразования m^3. Значит, множитель $\lambda = m^2$ и равенство (13) соблюдается, если

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11} = X'_X = \frac{A_{11}}{\sqrt[3]{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}}(Y'_Y Z'_Z - Z'_Y Y'_Z); \quad a_{12} = X'_Y = \frac{A_{12}}{\sqrt[3]{\Delta}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}}(Z'_X Y'_Z - Y'_X Z'_Z); \; a_{13} = X'_Z = \frac{A_{13}}{\sqrt[3]{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}}(Y'_X Z'_Y - Y'_Y Z'_X). \\
&a_{21} = Y'_X = \frac{A_{21}}{\sqrt[3]{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}}(X'_Z Z'_Y - X'_Y Z'_Z); \quad a_{22} = Y'_Y = \frac{A_{22}}{\sqrt[3]{\Delta}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}}(X'_X Z'_Z - X'_Z Z'_X); \; a_{23} = Y'_Z = \frac{A_{23}}{\sqrt[3]{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}}(Z'_X X'_Y - X'_X Z'_Y); \\
&a_{31} = Z'_X = \frac{A_{31}}{\sqrt[3]{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}}(X'_Y Y'_Z - X'_Z Y'_Y); \quad a_{32} = Z'_Y = \frac{A_{32}}{\sqrt[3]{\Delta}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}}(Y'_X X'_Z - Y'_Z X'_X); \; a_{33} = Z'_Z = \frac{A_{33}}{\sqrt[3]{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}}(X'_X Y'_Y - X'_Y Y'_X).
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Условия (15) идентичны условиям (10) и косвенным образом их подтверждают. Значит, конформность формул преобразования в трехмерном пространстве можно проверять с помощью условий (10).

Список литературы: 1. *Бурша М.* Основы космической геодезии, ч. 1. М., «Недра», 1971. 129 с. 2. *Буткевич А. В.* Некоторые вычислительные проблемы космической геодезии. — В сб.: 50 лет ленинского декрета об учреждении ВГУ. Львов, Изд-во Львов. ун-та, 1970, с. 11—21 3. *Изотов А. А. и др.* Основы спутниковой геодезии. М., «Недра», 1975, 316 с. 4. *Мусхелишвили Н. И.* Курс аналитической геометрии. М., «Высшая школа», 1967, 655 с. 5. *Hedrick E. R., Ingold L.* Analytic function in three dimensions. — «Trans. of the Amer. Math. Soc.», 1925, vol. 27, p. 551—555. 6. *Michail E.* Simultaneous three-dimensional transformation of higher degrees. «Photogrammetric Engineering», 1964, N 4, p. 589—594. 7. *Rinner K.* Die raumliche. Drehstrecnung, «Acta technische Acad. scient. hung.», 1965, 52, N 3—4, 8, c. 373—391.

Работа поступила в редколлегию 9 сентября 1976 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и астрономии Львовского политехнического института.