

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, д-р техн. наук, П. М. ЗАЗУЛЯК

Львовский политехнический институт

## О ГРАВИТАЦИОННОЙ ФИГУРЕ ЛУНЫ

Под гравитационной фигурой Луны, или селеноидом, понимается одна из уровенных поверхностей потенциала силы тяжести, отвечающая в среднем физической поверхности [4]. К настоящему времени имеется лишь один вид информации, позволяющей изучать фигуру селеноида, а именно: данные о гравитационном поле Луны, полученные с помощью ИСЛ [1, 12, 13, 17—21, 24].

При исследовании фигур геоида, селеноида стараются использовать наиболее полные модели гравитационного поля. И это естественно, так как между объемом модели и ее точностью нет четкой зависимости, все же, как правило, более точные модели содержат и большее число членов разложения потенциала [5]\*. Для Луны в настоящее время наиболее полными являются модели ее гравитационного поля [20, 21], содержащие гармонические коэффициенты до 13-го порядка и степени включительно. Кроме того, согласно сообщению [24], А. Феррари [13] в 1974 г. получил модель с коэффициентами до 16-го порядка, однако в указанных публикациях значения гармоник не приведены.

Целью настоящей работы является получение и исследование фигуры селеноида по двум наиболее полным (из известных нам) моделям гравитационного поля Луны [20, 21].

§ 1. В отличие от методов, применявшихся для вычисления высот селеноида разными авторами [2, 8—11], воспользуемся

\* Такое утверждение в теоретическом отношении справедливо полностью. Однако для реальных моделей оно не всегда выполняется: наличие большого числа членов разложения потенциала еще не гарантирует достаточную точность модели. И, как будет видно из последующего, это в особенности относится к моделям гравитационного поля Луны.

несколько иным подходом к решению этой задачи. Высоты селеноида вычислим следующим образом:

$$h = r - r_{\text{от}}, \quad (1)$$

где  $r$  — радиальное расстояние до эквипотенциальной поверхности;  $r_{\text{от}}$  — радиус-вектор поверхности относимости. Расстояние  $r$  определим из выражения

$$r = r_0 x^{-1}, \quad (2)$$

при этом значение  $x$  найдем методом итераций из решения уравнения

$$x = K - A^* x^{-2} - \sum_{n=2}^N A_n x^{n+1}, \quad (3)$$

где

$$K = 1 + \sum_{n=2}^N \left( \frac{R}{r_0} \right)^n Z_n(\vartheta_0, \lambda_0) + \frac{x}{3} [1 - P_2(\cos \vartheta_0)] = \text{const},$$

$$A^* = \frac{x}{3} [1 - P_2(\cos \vartheta)], \quad A_n = \left( \frac{R}{r_0} \right)^n Z_n(\vartheta, \lambda), \quad x = \frac{\omega^2 r_0^3}{f M},$$

$$Z_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta), \quad (n=2, 3, \dots, N) \quad (4)$$

В выражениях (4)  $c_{nm}$  и  $s_{nm}$  — стоксовые постоянные Луны;  $R$  — средний радиус;  $fM$  — селеноцентрическая постоянная;  $\omega$  — угловая скорость вращения;  $P_{nm}(\cos \vartheta)$  — присоединенная функция Лежандра;  $r_0, \vartheta_0, \lambda_0$  — координаты фиксированной точки пространства, через которую проходит искомая уровенная поверхность.

Уравнение (3) получено преобразованием уравнения, определяющего неявным образом эквипотенциальную поверхность  $W(r, \vartheta, \lambda) = \text{const} = W(r_0, \vartheta_0, \lambda_0)$ .

§ 2. Рассмотрим сначала уровенную поверхность Луны, определяемую ее стоксовыми постоянными второго порядка. Пусть точка, через которую должна проходить искомая поверхность, лежит на экваторе ( $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ ). Тогда, сохранив при решении уравнения (3) члены только первого порядка малости (относительно сжатий Луны), после двух итераций получим \*

$$r = r_0 (1 - p) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{1-p} \cos^2 \vartheta + \frac{3 c_{22}}{1-p} \sin^2 \vartheta \cos 2\lambda \right), \quad (5)$$

где  $\varepsilon = -\frac{3}{2} c_{20} + \frac{x}{2}$ ,  $p = 3 c_{22} \cos 2\lambda_0$ ,

\* При этом считаем, что  $c_{21} = s_{21} = s_{22} = 0$ .

Уравнение (5) с указанной точностью является уравнением трехосного эллипсоида. Кроме того, при  $c_{22}=0$  постоянная  $p=0$ , и из выражения (5) получаем  $r=r_0(1-\epsilon \cos^2 \theta)$  — классическое уравнение Клеро.

Величину  $r_0$  найдем из условия равенства объемов эллипсоида (5) и сферы радиуса  $R$ , равновеликой объему планеты

$$r_0 = R \left( 1 + p - \frac{1}{2} c_{20} + \frac{\kappa}{6} \right), \quad (6)$$

где  $p$ , а значит, и  $r_0$  определяются долготой  $\lambda_0$  выбираемой точки на экваторе. Кроме того, на основании уравнений (5) и (6) теперь легко найти (с принятой степенью точности) и полуоси трехосного эллипсоида, аппроксимирующего селеноид второго порядка

$$\left. \begin{aligned} a &= R \left( 1 - \frac{1}{2} c_{20} + 3 c_{22} + \frac{\kappa}{6} \right); \\ b &= R \left( 1 - \frac{1}{2} c_{20} - 3 c_{22} + \frac{\kappa}{6} \right); \\ c &= R \left( 1 + c_{20} - \frac{\kappa}{3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Сжатия такого эллипсоида в соответствующих плоскостях определим из выражений

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{a-c}{R} = 3 c_{22} - \frac{3}{2} c_{20} + \frac{\kappa}{2}; \\ \alpha'' &= \frac{b-c}{R} = -3 c_{22} - \frac{3}{2} c_{20} + \frac{\kappa}{2}; \\ \alpha''' &= \frac{a-b}{R} = 6 c_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Выясним, в какой мере такой эллипсоид подходит к поверхности селеноида, вычисляемого с учетом гармоник гравитационного поля более высоких порядков. М. Бурша [10] находил параметры трехосного эллипсоида, наиболее подходящего к экви-потенциальной поверхности, исходя из условия

$$\int_s (\rho_w - \rho_s)^2 ds = \min, \quad (9)$$

где  $\rho_w$  — радиальное расстояние до уровенной поверхности, построенной с учетом гармоник до 13-го порядка по данным работы [20] и проходящей через точку прилунения «Аполлон-11»,  $\rho_s$  — радиус-вектор искомого эллипсоида. Несколько

позже им [11] были проведены аналогичные исследования, но при этом использовались измеренное значение силы тяжести в месте посадки «Аполлон-12» и гармоники гравитационного поля по данным работы [21].

Принимая за исходные те же величины, что и М. Бурша, вычислим теперь по формулам (7) и (8) характеристики лунного трехосного эллипсоида. Воспользуемся в первом случае гармоническими коэффициентами второго порядка по данным исследований [20] и  $R=1735,256$  км [10], а во втором — значениями  $c_{20}$  и  $c_{22}$  из [21] и  $R=1735,787$  км [11]. Результаты вычислений, так же как и значения параметров, полученные в [10, 11], приведены в таблице.

Параметры лунного референц-эллипса

Параметры (полусоси и сжатия)	По Бурше [10]	Вычисленные по формулам (7) — (8)	По Бурше [11]	Вычисленные по формулам (7) — (8)
$a$ (км)	1735,559	1735,555	1736,100	1736,095
$b$ (км)	1735,325	1735,321	—	1735,837
$c$ (км)	1734,897	1734,892	—	1735,429
$a'$	1:2622	1:2620	1:2604	1:2604
$a''$	—	1:4046	—	1:4257
$a'''$	1:7436	1:7434	1:6720	1:6720
$\lambda$	0°3	—	0°	—
$a_{ср}^{екв}$	1735,442	1735,438	—	1735,966
$a_{ср}^{\text{пол}}$	1:3184	1:3181	—	1:3232

Ориентировку осей эллипса  $\bar{\lambda}$  мы не оценивали, так как при выводе формул заранее предполагали, что они совпадают с главными осями инерции Луны. В принципе угол  $\bar{\lambda}$  можно определить по формуле [6]  $\operatorname{tg} 2\bar{\lambda} = s_{22}/c_{22}$ . Используя  $s_{22}$  и  $c_{22}$  по данным [20], получаем  $\bar{\lambda}=0,27^\circ$ , причем простые расчеты показывают, что значения полуосей и сжатий эллипса с этой ориентировкой практически не изменяются.

Из таблицы видно, что характеристики референц-эллипса, найденные, с одной стороны, под классическим условием (9), а с другой — вычисленные по формулам (7) — (8), хорошо согласуются между собой. На основании этого можно сделать вывод, что формулы (7) — (8) позволяют с достаточной точностью вычислять параметры лунного трехосного эллипса по стоксовым постоянным только второго порядка.

Для определения характеристик трехосного эллипса, принимаемого в дальнейшем за поверхность относимости, воспользуемся следующими числовыми значениями: средний радиус Луны  $R=1738,09$  км [21], селенографическая постоянная  $fM=4902,72$   $\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2}$  [4], гармонические коэффициенты второго порядка  $c_{20}=-2,047 \cdot 10^{-4}$  и  $c_{22}=0,225 \cdot 10^{-4}$  [7], угловая скорость вращения  $\omega=0,26617033 \cdot 10^{-5}$   $\text{рад} \cdot \text{с}^{-1}$  [12]. Тогда значе-

ния полуосей лунного эллипсоида и его сжатий в соответствующих плоскостях

$$a = 1738,400 \text{ км}, b = 1738,146 \text{ км}, c = 1737,723 \text{ км},$$

$$a' = 1 : 2568, a'' = 1 : 4110, a''' = 1 : 6844. \quad (10)$$

Заметим, что при вычислении параметров (10) было учтено влияние притяжения Земли на фигуру Луны [3].

§ 3. Перейдем теперь к рассмотрению сelenоида, получаемого с учетом гармоник гравитационного поля высших порядков. С этой целью по формулам (1) — (4) были вычислены значения радиальных расстояний  $r$  по двум моделям гравитационного поля [20] и [21] и построены карты высот сelenоида относительно трехосного эллипса с параметрами (10) (рис. 1, 2). При этом вместо гармоник второго порядка из работ [20] и [21] использованы те же значения  $c_{20}$  и  $c_{22}$ , что и при вычислении параметров референц-эллипса (10), а также  $c_{21} = s_{21} = s_{22} = 0$ . Кроме того, вместо значений коэффициентов  $c_{13,10} = -7,5223 \cdot 10^{-14}$  и  $s_{13,10} = 3,3136 \cdot 10^{-14}$  для модели гравитационного поля [21] взяты их исправленные значения  $c_{13,10} = -1,5177 \cdot 10^{-15}$  и  $s_{13,10} = 2,2706 \cdot 10^{-15}$ , указанные в работе [16].

Для нахождения  $r$  уравнение (3) решалось методом итераций с точностью  $1 \cdot 10^{-6}$ , которая обеспечивает вычисление  $r$  с погрешностью  $\pm 1,7$  м. Эта точность вычисления  $r$  здесь вполне допустима, так как ошибка определения радиального расстояния до эквипотенциальной поверхности, обусловленная точностью исходных данных (значения  $r_0$  и модели гравитационного поля Луны), во много раз больше [15]. При этом следует отметить, что погрешность значения  $r_0$  приведет к тому, что все вычисленные значения  $r$  будут ошибочны на постоянную величину.

Карты высот сelenоида относительно трехосного эллипса, построенные по данным работ [20, 21], приведены в [10, 11], однако только для видимой стороны Луны. Сравнение высот сelenоида по М. Бурше [10] с полученными нами (рис. 1) показывает, что для видимой стороны Луны они хорошо согласуются, несмотря на то, что вычислялись разными методами. Если же сравнить карту, приведенную в работе [11] и представленную на рис. 2, то видно, что значения высот несколько отличаются. Последнее объясняется тем, что в работе [11] использованы неисправленные значения гармонических коэффициентов  $c_{13,10}$  и  $s_{13,10}$ .

Результаты определения высот сelenоида по параметрам моделей гравитационного поля [20] и [21], как это видно из сравнения карт, приведенных на рис. 1 и 2, не дают возможности однозначно выполнить детальный анализ особенностей фигуры сelenоида. Однако некоторые общие качественные черты сelenоида отчетливо выявляются на приведенных здесь рисунках. В частности, районы таких круговых лунных морей, как

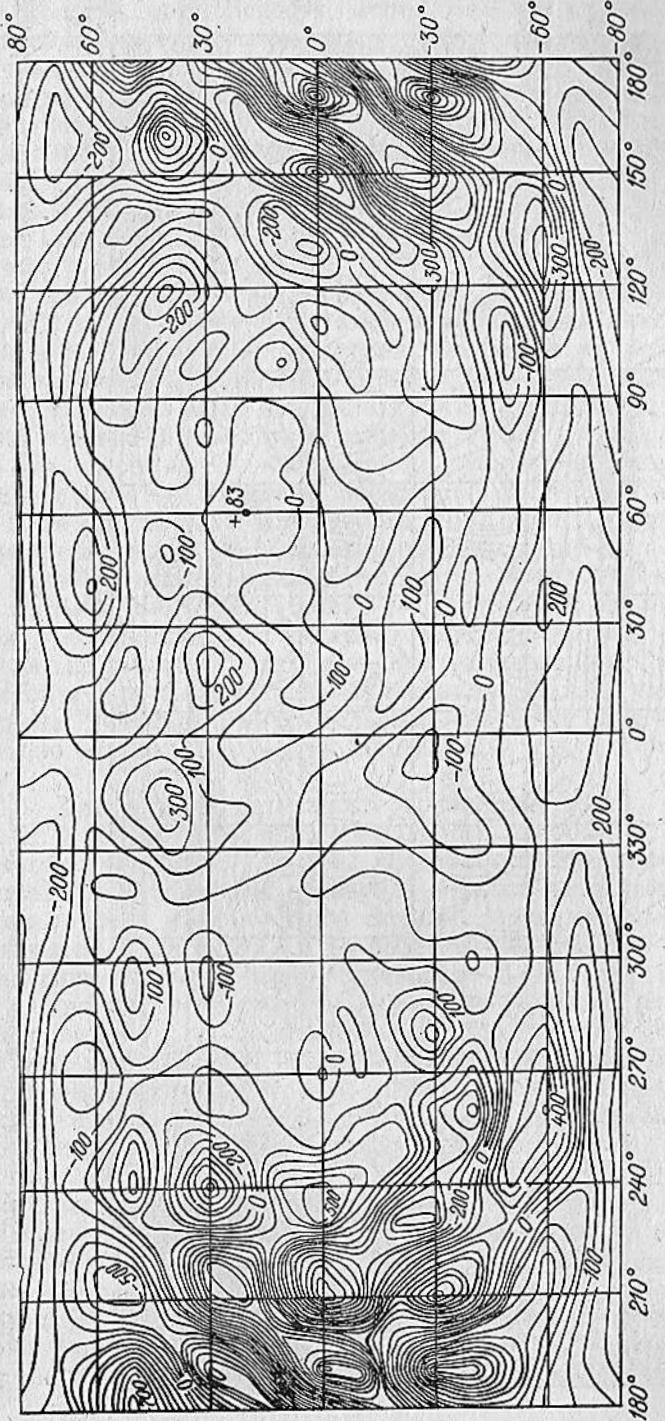


Рис. 1. Высоты селеноида, вычисленные по данным работы [20], относительно эллипсоида ( $a = 1738,400$  км;  $a' = 1 : 2568$ ;  $\alpha''' = 1 : 6844$ ;  $\lambda = 0^\circ$ ).

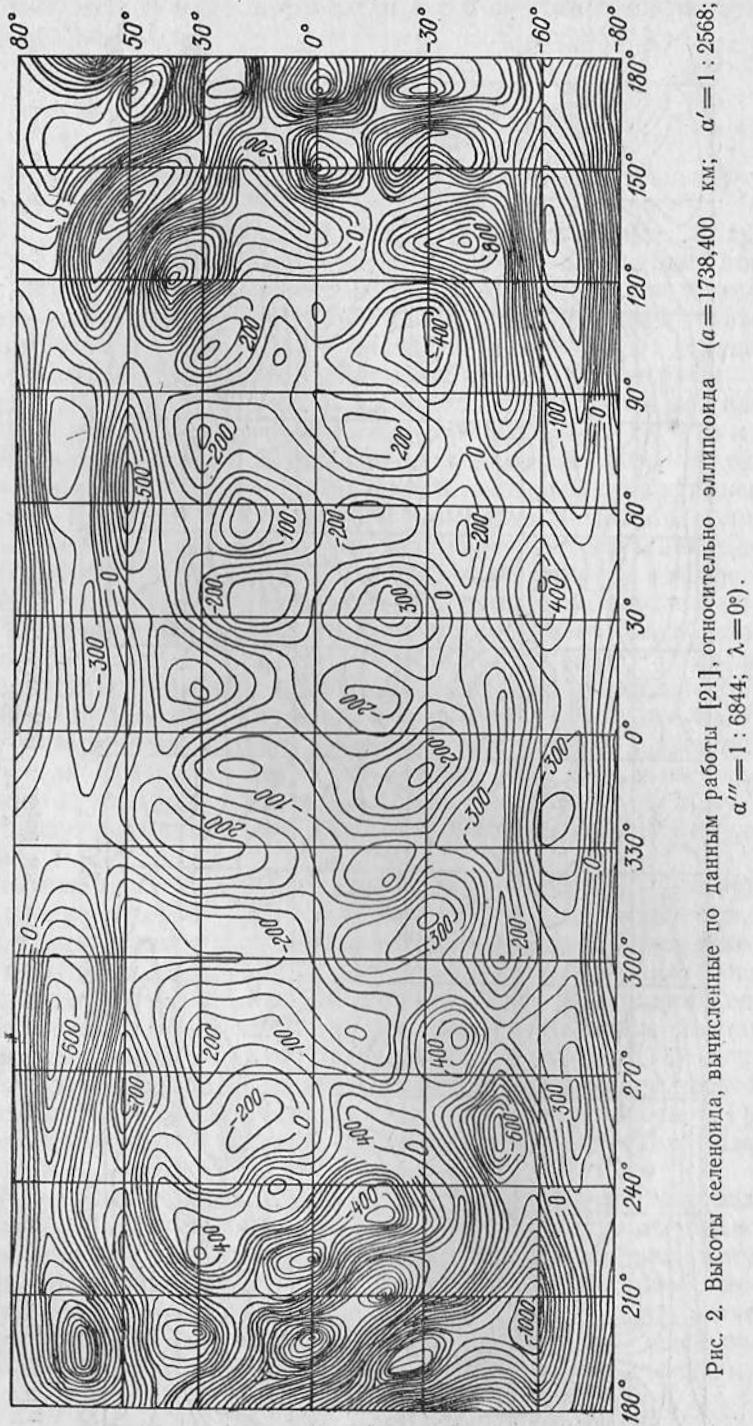


Рис. 2. Высоты селеноида, вычисленные по данным работы [21], относительно эллипсоида ( $a = 1738,400$  км;  $\alpha' = 1 : 2568$ ;  $\alpha''' = 1 : 6844$ ;  $\lambda = 0^\circ$ ).

море Дождей, море Ясности, море Кризисов и море Нектара, характеризующиеся сосредоточением больших избыточных масс, получивших название масконов [22] (см. также [4]), являются областями положительных высот селеноида. Однако такого же совпадения между областями положительных ондуляций селеноида и районами расположения других известных масконов по картам 1 и 2 не обнаруживается. Но интересно отметить, что несколько южнее масконов в море Восточном ( $\beta = -20^\circ$ ,  $\lambda = -95^\circ$ ) и море Гrimальди ( $\beta = -6^\circ$ ,  $\lambda = -68^\circ$ ) на обеих картах имеется поднятие селеноида до 600 м.

Фигура селеноида обратной стороны Луны, как это видно из рис. 1 и 2, сравнительно сложнее, чем видимая. Для этой области характерны более резкие перепады высот, и их значения по абсолютной величине намного больше. Эту особенность фигуры селеноида можно было бы связать с тем фактом, что и в отношении топографии обратная сторона Луны сложнее видимой [14]. Но скорее всего это является следствием более слабого представительства стоксовых постоянных моделей гравитационного поля [20, 21] для обратной стороны Луны. Действительно, рассмотрение карт [21] радиальных ускорений силы тяжести на высоте 100 км показывает, что их значения на обратной стороне Луны намного превосходят таковые для видимой. В то же время в соответствии с недавней моделью А. Феррари [13], которая, по мнению участников 8-й конференции ГЗОФ [24], является наилучшей моделью гравитационного поля Луны, абсолютные величины максимальных значений этих ускорений примерно одинаковы как для видимой, так и для обратной стороны.

§ 4. Для более детального сравнения высот селеноида (рис. 1, 2) были вычислены их разности  $\Delta h$  в узлах картографической сетки  $10 \times 10^\circ$  по всей поверхности Луны. Эти разности показали, что высоты селеноида больше различаются в полярных районах и на обратной стороне. Максимальные расхождения высот достигают 1 км (и более) и практически сравнимы со значениями самих высот селеноида. Для близэкваториального района видимой стороны Луны эти разности наименьшие. Такое положение, возможно, объясняется тем, что модели [20, 21] лучше представляют гравитационное поле близэкваториального района видимой стороны, а это в свою очередь является следствием того, что именно на этот район приходится наибольшее количество наблюдений, использованных при получении этих моделей.

На основании вычисленных разностей была выполнена, как это сделано У. Кенлейном [15] по другим данным для Луны и Резенбергом и др. [23] для Марса, некоторая оценка полученных высот селеноида. Для видимой стороны Луны, ограниченной  $\pm 40^\circ$  по широте, среднее квадратическое уклонение высот составляет приблизительно 140 м, для более высоких в широтном отношении районов — приблизительно 290 м. Значения

средних квадратических уклонений высот сelenоида по широтам для видимой стороны Луны приведены на рис. 3. С учетом разностей высот для обратной стороны величины этих характеристик оказываются более значительными.

По оценке У. Кенлейна [15], среднее квадратическое уклонение высот эквипотенциальной поверхности составляет 170 м.

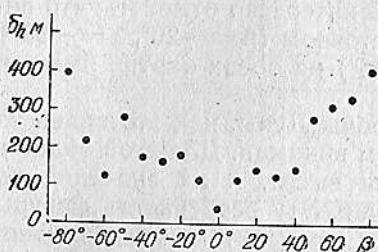


Рис. 3. Средние квадратические уклонения  $\delta_4$  высот сelenоида для видимой стороны Луны ( $\beta$  — сelenографическая широта).

Это меньше, чем можно было бы получить на основании вычисленных нами разностей. Последнее объясняется в основном тем, что в работе [15] использованы только коэффициенты моделей гравитационного поля до 8-го порядка и степени. Привлечение же гармоник более высоких порядков, как это ни парадоксально, в основном лишь увеличивает разность высот (рис. 4), в результате чего изменяется (ухудшается) оценка их

средних квадратических уклонений. На рис. 4 показана зависимость разности высот  $\Delta h$  от числа используемых гармоник  $n$ . На каждом из них приведены результаты вычислений  $\Delta h$  для точек, лежащих на одном меридиане, но на пяти разных широтах \*.

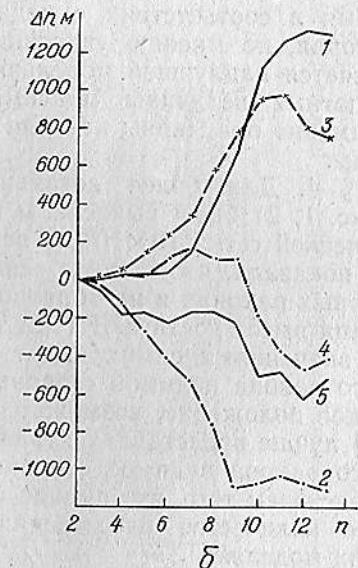
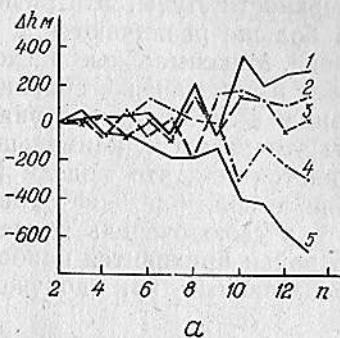


Рис. 4. Зависимость разности  $\Delta h$  высот сelenоида от числа  $n$  гармонических коэффициентов на меридианах  $\lambda = 30^\circ$  (а) и  $\lambda = 210^\circ$  (б):

1 —  $\vartheta = 150^\circ$ ; 2 —  $\vartheta = 120^\circ$ ; 3 —  $\vartheta = 90^\circ$ ; 4 —  $\vartheta = 60^\circ$ ; 5 —  $\vartheta = 30^\circ$ .

\* Подобные зависимости были получены по всей поверхности Луны в узлах сетки  $10 \times 10^\circ$ , и почти во всех случаях они имеют вид, показанный на рис. 4.

Таким образом, карты высот селеноида (рис. 1 и 2), построенные на основании наиболее полных моделей гравитационного поля [20] и [21], хотя и отражают глобальную гравитационную фигуру Луны в общих чертах, но все же заметно отличаются друг от друга. Эти различия, как указывалось ранее, больше в полярных районах и на обратной стороне Луны; наименьшими они оказались для близэкваториального района ее видимой стороны.

Важно отметить, что согласно выполненным исследованиям в случае использования моделей [20] и [21] установлена определенная зависимость (рис. 4) между разностями высот селеноида и числом учитываемых гармоник гравитационного потенциала Луны: при увеличении числа гармоник эти разности не уменьшаются, как это должно было бы быть теоретически, а, наоборот, возрастают. Другими словами, большой объем (наличие большого числа членов разложения) моделей гравитационного поля [20, 21] еще не гарантирует достаточной точности моделей. Причина этого, возможно, кроется в недостаточной надежности использованных значений стоксовых постоянных высоких порядков.

В заключение отметим также, что использованная нами методика вывода лунного трехосного эллипсоида позволяет уверенно находить его параметры по гармоникам только второго порядка.

**Список литературы:** 1. Аким Э. Л. Определение поля тяготения Луны по движению искусственного спутника Луны «Луна-10». — «ДАН СССР», 1966, т. 170, № 4, с. 799—802. 2. Бузук В. В. Гравитационное поле и фигура Луны по данным ИСЛ с учетом гармонических коэффициентов до 7-го порядка. — В сб.: Современные проблемы позиционной астрометрии, М., Изд-во МГУ, 1975, с. 295—300. 3. Зазуляк П. М. О влиянии притяжения Земли на фигуру Луны. — В данном сборнике. 4. Исаинина И. В. Фигура и гравитационное поле Луны. — В сб.: Луна-1. Итоги науки и техники, М., ВНИТИ, 1973, с. 86—135. 5. Мартин К. Ф., Рой Н. А. Модель ошибок для Стандартной Земли 1969 (САО). — В сб.: Использование искусственных спутников для геодезии, М., «Мир», 1975, с. 231—243. 6. Мещеряков Г. А. О фигуре Марса. — «Астрономический журнал», 1975, т. 52, вып. 2, с. 374—379. 7. Мещеряков Г. А., Зазуляк П. М., Киричук В. В. О вычислении моментов инерции Луны. — «Астрономический журнал», 1976, т. 53, вып. 3, с. 620—625. 8. Хабибуллин Ш. Т., Чиканов Ю. А. Определение фигуры и аномалий силы тяжести Луны по данным наблюдений ИСЛ. — «Изв. Астрон. обсерв. им. В. П. Энгельгардта», 1969, № 37, с. 158—170. 9. Чуйкова Н. А. Гравитационное поле и фигура Луны. — «Астрономический журнал», 1968, т. 45, вып. 6, с. 1293—1302. 10. Burša M. Determination of parameters of a selenocentric reference system and deflections of the vertical at the lunar surface. (Presented at the XV IUGG General Assembly, Moscow, 1971). Prague, 1971, 19 р. 11. Burša M. Parameters of the selenopotential model and the lunar deflections of the vertical. — «Bull. Astron. Inst. Czechosl.», 1975, т. 26, № 3, р. 140—148. 12. Ferrari A. J. An empirically derived lunar gravity field. — «Moon», 1972, v. 5, № 3—4, p. 390—410. 13. Ferrari A. J. Lunar gravity: The first farside map. — «Science», 1975, v. 188, № 4195, p. 1297—1300. 14. Kaufla W. M., Schubert G., Lingenfelter R. E., Sjögren W. L., Wollenhaupt W. R. Lunar topography from Apollo 15 and 16 laser altimetry. — «Geochim. Cosmochim. Acta», 1974, 3, Suppl. 4, p. 2811—2819. 15. Köhnlein W. On the accuracy of the Moon's gravity field as derived from Lunar Orbiters. — Space Res.

XIV, Proc. 16 th Plenary Meet. COSPAR, Constance, 1973, p. 647—652. 16. *Kermani M. B., Arkani-Hamed J.* Revision of density and stress differences in the Moon. — «Moon», 1974, v. 11, № 3—4, p. 317—322. 17. *Liu A. S., Laing P. A.* Lunar gravity analysis from long term effects. — «Science», 1971, v. 173, № 4001, p. 1017—1020. 18. *Lorell J., Sjogren W. L.* Lunar gravity: preliminary estimates from Lunar Orbiters. — «Science», 1968, v. 159, № 3815, p. 625—627. 19. *Lorell J.* Lunar Orbiter gravity analysis. — «Moon», 1970, v. 1, № 2, p. 190—231. 20. *Michael W. H., Blackshear W. T., Gapcynski J. P.* Results on the mass and gravitational field on the Moon as determined from dynamics of lunar satellites. 12 th Plenary Meet. COSPAR, Prague, 1969. — «Dynamics of Satellites». Berlin, 1970, p. 42—56. 21. *Michael W. H., Blackshear W. T.* Recent results on the mass, gravitational field and moments of inertia of the Moon. — «Moon», 1972, v. 3, № 4, p. 388—402. 22. *Muller P. M., Sjogren W. L.* Mascons: lunar mass concentrations. — «Science», 1968, v. 161, № 3842, p. 680—684. 23. *Reasenberg R. D., Shapiro I. I., White R. D.* The gravity field of Mars. — «Geophys. Res. Lett.», 1975, v. 2, № 3, p. 89—92. 24. Report of the eighth Geop. Research Conference. — «Trans. Amer. Geophys. Union», 1975, v. 56, № 6, p. 318—326. 25. *Sjogren W. L.* Lunar gravity estimate: Independent confirmation. — «J. Geophys. Res.», 1971, v. 76, № 23, p. 7021—7026.

Работа поступила в редколлегию 24 ноября 1976 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.